المميز

في

التفاضل و التكامل

الصف الثالث الثانوى

٢٠١٤

أ. أحمد الشتتورى

بسم الله الرحمن الرحيم

أحمد الله و اشكره و أثنى عليه أن أعاننى
و وفقنى لتقديم هذا الكتاب من مجموعة

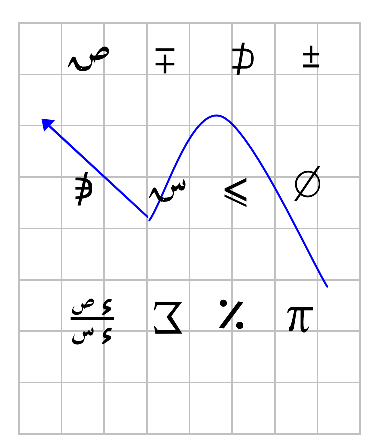
" المميز "

فى الرياضيات لأقدمه لأبنائى المتعلمين
و إخوانى المعلمين و الذى راعيت فيه
تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة و ممتعة
مدللاً بأمثلة محلولة ثم تدريبات على كيفية
الحل ثم تمارين متنوعة و متدرجة لتناسب
كل المستويات
متمنياً أن ينال رضاكم و ثقتكم التى أعتز بها
و الله لا يضيع أجر من أحسن عملا
و هو ولى التوفيق

أحمد الشنتورى

المحتويات

التفاضل و التكامل



الموضوعات

النهـــايـــات

تذكر ما يلى :

(١) إذا كانت د (س) كثيرة حدود من أى درجة فإن : $\lim_{س \to أ}$ د (س) = د (أ)

(٢) إذا كانت د (س) على الصورة $\frac{س^ن - أ^ن}{س - أ}$ فإن :

$\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن\, أ^{ن-١}$ ، $\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م}\, أ^{ن-م}$

(٣) إذا كانت د (س) دالة كسرية جبرية و لتكن د (س) = $\frac{ك(س)}{ع(س)}$ حيث :
ك (س) ، ع (س) كثيرتا حدود ، ع (س) ≠ ٠ فلإيجاد $\lim_{س \to أ}$ د (س) نوجد د (أ) فإذا كانت :

١) د (أ) = $\frac{\text{عدداً حقيقى} \neq \text{الصفر}}{\text{عدداً حقيقى}}$ فإن : $\lim_{س \to أ}$ د (س) = د (أ)

٢) د (أ) = $\frac{\text{عدداً حقيقى} \neq \text{الصفر}}{\text{صفر}}$ فإن : $\lim_{س \to أ}$ د (س) تكون غير معرفة أى ليس لها وجود

٣) د (أ) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فيلزم التخلص من العامل (س − أ) من كل من البسط و المقام إما بالتحليل أو القسمة المطولة و ذلك قبل إيجاد د (أ)

(٤) إذا كانت د (س) دالة كسرية جبرية تحتوى على جذور تربيعية و كان : د (أ) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فيلزم التخلص من العامل (س − أ) بضرب البسط و المقام فى مرافق البسط أو المقام أو كليهما

(٥) بالنسبة لنهاية الدوال المثلثية :

١) $\lim_{س \to أ}$ جا س = جا أ ، $\lim_{س \to أ}$ جتا س = جتا أ ،
$\lim_{س \to أ}$ طا س = طا أ حيث : أ $\neq \frac{٢ن + ١}{٢}$ ط ، ن ∈ ص

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا س}}{س} = ١$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{طا س}}{س} = ١$ (حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى)
، $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{أ}{ب}$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{طا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{أ}{ب}$

نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة

تمهيد : " الإقتراب من اليمين و من اليسار من قيمة معينة "

نعلم أن كل عدد حقيقى تمثله نقطة على خط الأعداد
وكل نقطة على خط الأعداد تعبر عن عدد حقيقى
فإذا كانت نقطة س تتحرك على خط الأعداد مقتربة من النقطة أ التى تمثل العدد ٣ فإن س تعين عدداً يختلف عن ٣ أى : س = ٣ + هـ

و عندما : هـ > ٠ فإن : س > ٣
فتقترب س من العدد ٣ و ذلك من خلال قيم أكبر من ٣ كأن تأخذ س القيم : ٣,١ ، ٣,٠١ ، ٣,٠٠١ يقال فى هذه الحالة أن س تقترب من ٣ من جهة اليمين
و تكتب " $س \to ٣^{+}$ "

و عندما : هـ < ٠ فإن : س < ٣
فتقترب س من العدد ٣ و ذلك من خلال قيم أكبر من ٣ كأن تأخذ س القيم : ٢,٩ ، ٢,٩٩ ، ٢,٩٩٩ يقال فى هذه الحالة أن س تقترب من ٣ من جهة اليمين
و تكتب " $س \to ٣^{-}$ "

النهاية اليمنى و النهاية اليسرى :

إذا كانت د (س) = $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ بملاحظة الجدول التالى نجد :

	الإقتراب من اليمين ←						→ الإقتراب من اليسار		
س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	←	٣	→	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
د (س)	٦,١	٦,٠١	٦,٠٠١	←	٦	→	٥,٩٩٩	٥,٩٩	٥,٩

عندما تقترب س من العدد ٣ من جهة اليمين فإن د (س) تقترب من العدد ٦
و يقال أن النهاية اليمنى للدالة عندما تقترب س من العدد ٣ من جهة اليمين تساوى ٦
و يعبر عن ذلك : $\lim_{س \to ٣^{+}}$ د (س) = ٦ أو د (٣^{+}) = ٦

و بالمثل النهاية اليسرى للدالة = ٦ عندما تقترب س من العدد ٣ من جهة اليسار

أى أن : $\lim_{س \to ٣^-} د(س) = ٦$ أو $د(٣^-) = ٦$

نظرية :

الدالة د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← ﺃ إذا و فقط إذا كانت نهايتاها اليمنى و اليسرى عند ﺃ موجودتين و كل منهما تساوى ل أى أن :

$\lim_{س \to ﺃ} د(س) = ل$ إذا و فقط إذا كان : $د(ﺃ^+) = د(ﺃ^-) = ل$

* **ملاحظات :**
* إذا كانت قاعدة الدالة مختلفة على يمين و يسار ﺃ مباشرة يلزم فى هذه الحالة بحث كل من $د(ﺃ^+)$ ، $د(ﺃ^-)$ فإن وجدتا يتم المقارنة بينهما كما يلى :
* إذا كان : $د(ﺃ^+) = د(ﺃ^-) = ل$ فإن : $\lim_{س \to ﺃ} د(س) = ل$
* إذا كان : $د(ﺃ^+) \neq د(ﺃ^-)$ فإن : $\lim_{س \to ﺃ} د(س)$ ليس لها وجود
* أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين و يسار ﺃ مباشرة فيمكن بحث نهاية مباشرة
* إذا كانت الدالة معرفة على] ﺃ ، ب [أو] ﺃ ، ب] فلبحث نهاية الدالة عند ﺃ أو ب

نلاحظ :

(١) الدالة معرفة على يمين ﺃ فقط فعند البحث عن $\lim_{س \to ﺃ} د(س)$ يكتفى بالنهاية اليمنى فقط و تعتبر هى نهاية الدالة إن وجدت

(٢) الدالة معرفة على يسار ب فقط فعند البحث عن $\lim_{س \to ب} د(س)$ يكتفى بالنهاية اليسرى فقط و تعتبر هى نهاية الدالة إن وجدت

مثال [١]

إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & ، س > -٢ \\ ٢س + ٣ & ، س > -٢ \end{cases}$ أبحث وجود :

$\lim_{س \to ٣} د(س)$ ، $\lim_{س \to -٢} د(س)$ ، $\lim_{س \to -٣} د(س)$

الحل

∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = ٣ مباشرة و هى : $د(س) = س^٢ + ٢$

∴ $\lim_{س \to ٣} د(س) = \lim_{س \to ٣} (س^٢ + ٢) = ٩ + ٢ = ١١$

، ∵ قاعدة الدالة على يسار س = −٢ تختلف عن قاعدتها على يمين س = −٢

∴ يجب بحث كلاً من النهاية اليمنى و النهاية اليسرى للدالة عند س = −٢

∵ $د(-٢^+) = \lim_{س \to -٢^+} (س^٢ + ٢) = ٦$

، $د(-٢^-) = \lim_{س \to -٢^-} (٢س + ٣) = -١$

، ∵ $د(-٢^+) \neq د(-٢^-)$ ∴ $\lim_{س \to -٢} د(س)$ ليس لها وجود

، ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = −٣ مباشرة

و هى : $د(س) = ٢س + ٣$

∴ $\lim_{س \to -٣} د(س) = \lim_{س \to -٣} (٢س + ٣) = -٦ + ٣ = -٣$

تدريب [١]

إذا كان د : $د(س) = \begin{cases} س + ٣ & \text{عندما } س < ١ \\ ٦ - ٢س & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ أبحث وجود :

$\lim_{س \to ٤} د(س)$ ، $\lim_{س \to ١} د(س)$ ، $\lim_{س \to -٤} د(س)$

مثال [٢]

إذا كان للدالة د : $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٥ - ٢٤٣}{س - ٣} & \text{عندما } س < ٣ \\ ٥س^٤ + ل س + ١٢ & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$

نهاية عند س = ٣ أوجد قيمة ل

الحل

∵ $\lim_{س \to ٣} د(س)$ موجودة ∴ $د(٣^+) = د(٣^-)$

∴ $\underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}} \frac{س^٥ - ٢٤٣}{س - ٣} = \underset{س \to ٣^+}{\text{نهـا}} (٥ س^٤ + ل س + ١٢)$

∴ $٥ \times (٣)^٤ = ٤٠٥ - ١٢ + ١٢$

و منها : $ل = -٤$

تدريب [٢]

إذا كان للدالة د : $د (س) = \begin{cases} \frac{س^٦ - ١}{س - ١} & \text{عندما } س < ١ \\ ٣ س^٣ + ل س + ١ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

نهاية عند $س = ١$ أوجد قيمة ل

مثال [٣]

أبحث وجود نهاية الدالة د : $د (س) = \begin{cases} س \text{ طتا } س & ، س > ٠ \\ \text{حا } س + \text{حتا } س & ، س < ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

الحل

∵ $د (٠^+) = \underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{طا } س} = ١$

، $د (٠^-) = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} (\text{حا } س + \text{حتا } س) = ٠ + ١ = ١$

، ∵ $د (-٠^+) \neq د (-٠^-)$ ∴ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} د (س) = ١$

تدريب [٣]

أبحث وجود نهاية الدالة د : $د (س) = \begin{cases} ٣ س \text{ قتا } س & ، س > ٠ \\ س + ٣ \text{ حتا } س & ، س < ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

تمارين (١)

(١) إذا كانت : $د (س) = \begin{cases} ٣س + ١ & \text{عندما } س < ١ \\ ٥ - س & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ أوجد كلاً من :

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} د (س)$ ، $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} د (س)$ ، $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} د (س)$

(٢) إذا كانت : $د (س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} & ، ١ < س < ٤ \\ \frac{١}{٢ س - ٥} & ، ٤ \leq س \leq ٦ \end{cases}$ أوجد كلاً من :

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} د (س)$ ، $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} د (س)$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} د (س)$

(٣) إذا كانت : $د (س) = \begin{cases} \frac{٢ س}{\text{حا } س} & ، -\frac{\pi}{٢} < س < ٠ \\ ٢ \text{ حتا } \frac{٤}{٣} س & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ أوجد كلاً من :

$\underset{س \to -\frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} د (س)$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} د (س)$ ، $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} د (س)$

(٤) أبحث وجود نهاية الدالة د : $د (س) = \begin{cases} ٣ س^٢ + ٨ & ، س > ١ \\ ٢ س + ٩ & ، س < ١ \end{cases}$

عند $س = ١$

(٥) أبحث وجود نهاية الدالة د : $د (س) = \begin{cases} \frac{س^٥ - ٢٤٣}{س - ٣} & \text{عندما } س < ٣ \\ ٥ س^٤ - ٤ س + ١٢ & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$

عند $س = ٣$

(٦) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٣)^{٢} - ٩}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ س + ٦ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

(٧) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{حا ٣ س}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ حتا ٣ س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

(٨) أبحث وجود نهاية الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ١)^{٤} - ١}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{٥ س - حا س}{س حتا س} & ، س < ٠ \end{cases}$

عند س = ٠

(٩) ابحث وجود نهاية الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{حا (س - ٢)^{٢}}{س - ٢} & ، س > ٢ \\ ٤ - ٢ س & ، س < ٢ \end{cases}$

عند س = ٢

(١٠) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{أ س^{٢} + ٢ س - ٥}{س - ١} & \text{عندما } س < ١ \\ ٣ س + ٥ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

لها نهاية عند س = ١ أوجد قيمة أ

(١١) إذا كان للدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ١)^{٤} - ١}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{ل س - حا س}{س حتا س} & ، س < ٠ \end{cases}$

نهاية عند س = ٠ أوجد قيمة ل

(١٢) إذا كان للدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{ل س^{٢} + م س - ٥}{س - ١} & ، س > ١ \\ ل س + ٥ & ، س < ١ \end{cases}$

نهاية تساوى ٨ عند س = ١ أوجد قيم ل ، م

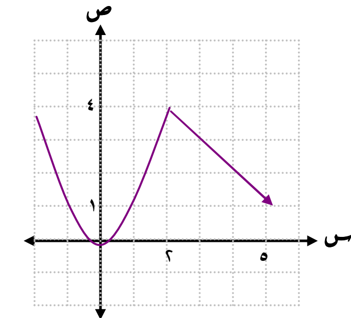
(١٣) إذا كانت : د (س) = س | س − ١ |+ ٣ أوجد كلاً من :

$\lim_{س \to ١}$ د (س) ، $\lim_{س \to ٣}$ د (س) ، $\lim_{س \to ٥}$ د (س)

الإتصال

أولاً : إتصال دالة عند نقطة :

بملاحظة الشكلين المقابلين نجد :



التمثيل البيانى للدالة ليس به ثغرة أو قفزة لذا يقال أن هذه الدالة متصلة عند س = ٢

التمثيل البيانى للدالة به ثغرة أو قفزة لذا يقال أن هذه الدالة غير متصلة عند س = ٢

تعريف :

إذا كانت الدالة د معرفة على فترة ما و كانت أ تنتمى إلى هذه الفترة نقول أن د متصلة عن أ إذا و فقط إذا كانت : $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

أى نستنتج أن :

شروط إتصال دالة عند نقطة :

تكون الدالة د (س) عند س = أ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية مجتمعة :

(١) د (س) معرفة عند س = أ أى أن : د (أ) موجودة

(٢) $\lim_{س \to أ} د(س)$ لها وجود (٣) $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

* ملاحظات :

إذا لم يتحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة فإن :

د (س) تكون غير متصلة عند س = أ

* إذا كانت د (س) معرفة عند س = أ ، $\lim_{س \to أ} د(س)$ لها وجود

و كانت الدالة غير متصلة عند س = أ لأن $\lim_{س \to أ} د(س) \neq د(أ)$

فيمكن جعل الدالة متصلة عند س = أ بإعادة تعريفها عند س = أ بجعل

$\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

مثال [١] إبحث إتصال الدالة $د(س) = \begin{cases} س + ٣ & \text{عندما } س \leq ١ \\ ٦ - ٢س & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

عند س = ١

الحل

∵ د (١) = ٤ (١)

، ∵ $د(١^{+}) = \lim_{س \to ١^{+}} (٦ - ٢س) = ٤$

، $د(١^{-}) = \lim_{س \to ١^{-}} (س + ٣) = ٤$

، ∵ $د(١^{+}) = د(١^{-})$ ∴ $\lim_{س \to ١} د(س) = ٤$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : الدالة متصلة عند س = ١

تدريب [١] إبحث إتصال الدالة $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣} & \text{عندما } س < ٣ \\ ٥س^{٤} - ٤س + ١٢ & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$

عند س = ٣

مثال [٢] إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س + ٩} - ٣}{س} & ،\ س \neq ٠ \\ أ & ،\ س = ٠ \end{cases}$

أوجد قيمة أ التى تجعل د متصلة عند س = ٠

الحل

∵ د (س) متصلة عند س = ٠   ∴ د (٠) = $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

∴ ﻫ = $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٩} - ٣}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٩} - ٣}{س} \times \frac{\sqrt{س+٩} + ٣}{\sqrt{س+٩} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س(\sqrt{س+٩} + ٣)} = \frac{١}{٦}$

تدريب [٢] إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{ﻫ س^٢ + ٢ س - ٥}{س - ١} & \text{عندما } س < ١ \\ ٣ س + ٥ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

أوجد قيمة ﻫ التى تجعل د متصلة عند س = ٠

ثانياً : إتصال دالة على فترة :

تعريف :

(١) إذا كانت الدالة معرفة على ف =] ﻫ ، ب [فإن الدالة تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة

(٢) إذا كانت الدالة معرفة على ف = [ﻫ ، ب] فإن الدالة تكون متصلة على ف إذا تحققت الشروط التالية : (ﻫ) الدالة متصلة على] ﻫ ، ب [

(ب) الدالة متصلة من اليمين عند ﻫ   (حـ) الدالة متصلة من اليسار عند ب

ملاحظة :

إذا كانت الدالة غير متصلة عند حـ ∋] ﻫ ، ب [فإنها تكون غير متصلة على] ﻫ ، ب [

نظرية :

إذا كانت : الدالتان $د_١$ ، $د_٢$ معرفتان على ف = [ﻫ ، ب] و كانت متصلتين على ف

فإن : كلاً من الدوال التالية تكون متصلة على ف :

(١) $د_١ \pm د_٢$ (٢) $د_١ \times د_٢$ (٣) $\frac{د_١}{د_٢}$ حيث $د_٢$ (س) ≠ ٠

نتائج : بعض أنماط الدوال المتصلة

* دوال كثيرات الحدود متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* الدوال الكسرية الجبرية متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ماعدا عند أصفار دالة المقام

* دالة الجيب و دالة جيب التمام متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة الظل متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ماعدا عند النقط

س = ± $\frac{١}{٢}$ π ، ± $\frac{٣}{٢}$ π ، ± $\frac{٥}{٢}$ π ، ٠٠٠٠٠

مثال [٣] أبحث إتصال للدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ س + ١ & ، -٣ \le س \le ٢ \\ س^٢ + ٣ & ، ٢ < س < ٥ \end{cases}$

الحل

∵ د (س) = ٣ س + ١   لكل س ∋ [-٣ ، ٢]

، ∵ د (س) كثيرة حدود   ∴ د (س) متصلة على [-٣ ، ٢]   (١)

، ∵ د (س) = س^٢ + ٣   لكل س ∋] ٢ ، ٥ [

، ∵ د (س) كثيرة حدود   ∴ د (س) متصلة على] ٢ ، ٥ [(٢)

، ∵ د (٢) = ٧   ، د (٢^+) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (س^٢ + ٣) = ٧

، د (٢^-) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (٣ س + ١) = ٧

∴ د (٢) = د (٢^+) = د (٢^-)   ∴ د (س) متصلة عند س = ٢   (٣)

، ∵ د (-٣) = $\lim_{س \to -٣^+}$ (٣ س + ١)   ∴ د (س) متصلة من اليمين عند س = ٠   (٤)

، ∵ د (٥) = $\lim_{س \to ٥^-}$ (س^٢ + ٣) ∴ د (س) متصلة من اليسار عند س = ٠   (٥)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٥) ينتج أن : د (س) متصلة على [-٣ ، ٥]

تدريب [٣] أبحث إتصال للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ - ١ & ، -٢ \leqslant س \leqslant ١ \\ ٢ س + ١ & ، ١ < س < ٣ \\ ٣ س - ٢ & ، ٣ \leqslant س < ٦ \end{cases}$

تمارين (٢)

(١) أبحث إتصال الدالة د : د (س) =
- س ، ٠ < س < ١
- ٣ س + ١ ، ١ < س ≤ ٣
- $س^{٢}$ + ٤ ، ٣ < س < ٦

عند : أولاً : س = ١ ثانياً : س = ٣

(٢) أبحث إتصال الدالة د : د (س) =
- س | س | ، س ≠ ٠
- ٢ ، س = ٠

س = ٠

(٣) أبحث إتصال الدالة د : د (س) =
- ٣ $س^{٢}$ + ٨ ، س ≥ ١
- ٢ س + ٩ ، س < ١

س = ١

(٤) إذا كانت الدالة د : د (س) =
- م $س^{٢}$ + ٤ ك ، س ≤ ١
- ك س + ٣ م ، س > ١

متصلة عند س = ١

، د (١) = ١١ أوجد قيم ك ، م

(٥) إذا كان للدالة د : د (س) =
- $\frac{\sqrt{س - ك} - ١}{س - ٩}$ عندما س ≠ ٩
- س − م عندما س = ٩

متصلة عند س = ٩ أوجد قيمة كل من ك ، م

(٦) إذا كانت الدالة د : د (س) =
- $\frac{س^{٢} - (م + س) + م}{س - ١}$ ، س ≠ ١
- ٣ س − ١ ، س = ١

متصلة عند س = ١ أوجد قيمة م

(٧) إذا كان للدالة د : د (س) =
- $\frac{س^{١٧} + س^{١٣} - ٢}{س - ١}$ ، س < ١
- ٢ ك س + ٦ ، س ≥ ١

متصلة عند س = ١ أوجد قيمة ك

(٨) إذا كانت الدالة د : د (س) =
- $\frac{س^{ن} - ١}{س - ١}$ عندما س < ١
- ٤ س + ١ عندما س ≥ ١

متصلة عند س = ١ أوجد قيمة ن

(٩) أبحث إتصال للدالة د : د (س) =
- $س^{٢}$ + ٤ ، ٠ ≤ س ≤ ٢
- ٣ س + ٢ ، ٢ < س < ٥

(١٠) إذا كانت الدالة د : د (س) =
- ٣ س + ١ ، س ≤ − ١
- ك س + م ، − ١ < س ≤ ٣
- $س^{٢}$ − ٣ ، س ≥ ٣

متصلة على ح أوجد قيمة كل من ك ، م

(١١) إذا كانت الدالة د : د (س) =
- ك س + ٧ ، س ≤ − ١
- $س^{٢}$ + م ، − ١ < س ≤ ٢
- ٣ س + ك ، س ≥ ٢

متصلة على ح أوجد قيمة كل من ك ، م

(١٢) إذا كانت الدالة د : د (س) =
- $\frac{طا ٢ س}{(لو_{٢} (٨))^{س}}$ ، س ≤ ٠
- س + ك ، س > ٠

متصلة على ح أوجد قيمة ك

الإشتقاق

تذكر قواعد الإشتقاق (تطبق فقط على الدوال القابلة للإشتقاق) التالية :

* إذا كانت الدالة ص = د (س) = ك " ثابت "

فإن : د/ (س) " $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ " = صفر

* إذا كانت : د (س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ " ن ∈ ح " فإن : د/ (س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-١}$

* الحالات المختلفة :

(١) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}}$ فإن : د/ (س) = $\frac{-\text{ن}}{\text{س}^{\text{ن}+١}}$

(٢) إذا كانت : د (س) = $\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ك}}}$ فإن :

(أ) إذا كان : ك < م فإن : د/ (س) = $\frac{\text{ك}}{\text{م}\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{م}-\text{ك}}}}$

(ب) إذا كان : ك > م فإن : د/ (س) = $\frac{\text{ك}\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ك}-\text{م}}}}{\text{م}}$

حالة خاصة :

إذا كانت : د (س) = $\sqrt{\text{س}}$ فإن : د/ (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

* إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن :

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (د . ر) = : د . ر/ + د/ . ر

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\frac{\text{د}}{\text{ر}}$) = $\frac{\text{د/ . ر − د . ر/}}{\text{ر}^٢}$ حيث ر (س) ≠ ٠

* إذا كانت : د (س) = حا س فإن : د/ (س) = حتا س
* إذا كانت : د (س) = حتا س فإن : د/ (س) = − حا س
* إذا كانت : د (س) = طا س فإن : د/ (س) = $\text{قا}^٢$ س
* إذا كانت : د (س) = حا (أ س + ب) فإن : د/ (س) = أ حتا (أ س + ب)
* إذا كانت : د (س) = حتا (أ س + ب) فإن : د/ (س) = − أ حا (أ س + ب)
* إذا كانت : د (س) = طا (أ س + ب) فإن : د/ (س) = أ $\text{قا}^٢$ (أ س + ب)

حيث : أ ، ب ثابتان

قابلية الإشتقاق :

نعلم أن : المشتقة الأولى للدالة ص = د (س) هى :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د (س + هـ) − د (س)}}{\text{هـ}}$$

تعريف :

تكون الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عند نقطة س = أ تنتمى لمجال الدالة

إذا كان : $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س = أ}}$ لها وجود أى :

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د (أ + هـ) − د (أ)}}{\text{هـ}}$$ لها وجود

ملاحظات :

(١) إذا كانت النقطة س = أ تنتمى لمجال تعريف الدالة و كانت الدالة يتغير تعريفها فى يمين و يسار النقطة س = أ فعند البحث عن قابلية الإشتقاق عند س = أ لابد من بحث المشتقة اليمنى و المشتقة اليسرى للدالة عند س = أ حيث :

المشتقة اليمنى د/ (أ^{+}) = $\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠^{+}} \frac{\text{د (أ + هـ) − د (أ)}}{\text{هـ}}$

المشتقة اليسرى د/ (أ^{-}) = $\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠^{-}} \frac{\text{د (أ + هـ) − د (أ)}}{\text{هـ}}$

و المقارنة بينهما فإذا كان :

أولاً : $د'(أ^+) = د'(أ^-)$ فإن : الدالة تكون قابلة للإشتقاق عند س = أ

ثانياً : $د'(أ^+) \neq د'(أ^-)$ فإنها غير قابلة للإشتقاق عند س = أ

(٢) لبحث قابلية الإشتقاق يجب إيجاد $د'(أ^+)$ ، $د'(أ^-)$

أما إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق فتشتق الدالة بإستخدام قواعد الإشتقاق مباشرة

(٣) إذا كانت الدالة ص = د (س) معرفة على [أ ، ب] فإنه عند بحث قابلية الإشتقاق عند س = أ يكتفى ببحث تحقق وجود المشتقة اليمنى فقط ، و فى حالة وجودها تكون هى مشتقة الدالة ، و عند بحث قابلية الإشتقاق عند س = ب يكتفى ببحث تحقق وجود المشتقة اليمنى فقط ، و فى حالة وجودها تكون هى مشتقة الدالة

نظرية :

* إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند نفس النقطة

ملاحظات :

* عكس النظرية غير صحيح دائماً أى أنه إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس شرطاً أن تكون قابلة للإشتقاق عند هذه النقطة
فى حين الدالة القابلة للإشتقاق عند نقطة تكون متصلة عند نفس النقطة
* إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = أ فإنها تكون غير قابلة للإشتقاق عندها

مثال [١] إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢\,س & ، س \leq ١ \\ س^٢ + ١ & ، س > ١ \end{cases}$

فأبحث قابلية إشتقاقها عند س = ١

الحل

$$\because د'(١^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٢(١+هـ) - ٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٢هـ}{هـ} = ٢$$

$$، د'(١^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{[(١+هـ)^٢ + ١] - ٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ + ١ - ٢}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} (٢ + هـ) = ٢$$

$\because د'(١^+) = د'(١^-)$ ،

$\therefore$ د (س) قابلة للإشتقاق عند س = ١

تدريب [١] إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢\,س + ٤ & ، س \leq ٣ \\ س^٢ + ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$

فأبحث إتصالها عند س = ٣ ثم أبحث قابلية إشتقاقها عند س = ٣

مثال [٢] إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} م\,س + ك & ، س \leq ١ \\ س^٢ - ٣ & ، س > ١ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ١ أوجد م ، ك

الحل

$\because$ د قابلة للإشتقاق عند س = ١ $\therefore$ د متصلة عند س = ١

$\therefore د(١^-) = د(١^+)$ $\therefore -٢ = م + ك$ (١)

، $د'(١^-) = د'(١^+)$ $\therefore ٢ = م$

بالتعويض فى (١) ينتج : ك = −٤

تدريب [٢] إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} م\,س + ك & ، س \leq ٣ \\ س^٢ + ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ٣ أوجد م ، ك

لدالة الضمنية ـ الإشتقاق الضمنى :

* الدالة الصريحة هى : دالة على الصورة : ص = د (س)
* الدالة الضمنية هى : دالة على الصورة : د (س ، ص) = ٠

و الإشتقاق فى هذه الحالة يسمى إشتقاق ضمنى

ملاحظات :

* إذا كانت : $\text{ص} = [\,\text{د}(\text{س})\,]^{\text{ن}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\,[\,\text{د}(\text{س})\,]^{\text{ن}-١} \times \text{د}'(\text{س})$
* إذا كانت : ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن :
$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص})^{\text{ن}} = \text{ن}\,(\text{ص})^{\text{ن}-١} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$
* سواء كانت الدالة المعطاة على صورة دالة صريحة أو دالة ضمنية فإنه يمكن إيجاد مشتقتها الأولى مباشرة من قاعدة الإرتباط

فإذا تأملنا الدالة : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٤$ نجد أنها تمثل دالتين صريحتين هما :

الأولى : $\text{ص} = \sqrt{٤ - \text{س}^٢}$ ، و يكون :
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٤ - \text{س}^٢}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$$

و الثانية : $\text{ص} = -\sqrt{٤ - \text{س}^٢}$ ، و يكون :
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\text{س}}{-٢\sqrt{٤ - \text{س}^٢}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$$

، المشتقة الأولى لقاعدة الإقتران : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٤$ بالإشتقاق بالنسبة إلى س
هى : $٢\,\text{س} + ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

مثال [٣] أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلى :

أولاً : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٣\,\text{س} - ٤\,\text{ص} = ١$ ثانياً : حتا ٤ س = حا ٣ ص

الحـــل

أولاً : $٢\,\text{س} + ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٣ - ٤\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\,(٢\,\text{ص} - ٤) = -(٢\,\text{س} + ٣)$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-(٢\,\text{س} + ٣)}{٢\,\text{ص} - ٤}$

ثانياً : $-٤\,\text{حا}\,٤\,\text{س} = ٣\,\text{حتا}\,٣\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٤\,\text{حا}\,٤\,\text{س}}{٣\,\text{حتا}\,٣\,\text{ص}}$

تدريب [٣] أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلى :

أولاً : $\text{س}^٣ + \text{ص}^٣ - ٢\,\text{س} + ٣\,\text{ص}^٢ = ٥$ ثانياً : ظا ٤ س = حا ٢ ص

المشتقات العليا للدالة :

إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

* المشتقة الأولى لها دالة فى س و هى : $\text{ص}'$ أو $\text{د}'(\text{س})$
أو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ " معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س "
* المشتقة الثانية لها دالة فى س و هى : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ أو $\text{ص}''$
أو $\text{د}''(\text{س})$ أو $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$
* المشتقة الثالثة لها دالة فى س و هى : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}\right)$ أو $\text{ص}'''$
أو $\text{د}'''(\text{س})$ أو $\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣}$ ٠٠٠٠ و هكذا

ملاحظات :

* إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى ع
، ع = ر (س) دالة قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :
* $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$
* إذا كانت : ص = د (س) ، ع = ر (س) دالتان قابلتان للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :
* $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ ، $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءع}^٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right) \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$

مثال [٤] أوجد المشتقة الثالثة للدالة :

ص = س^{٤} + ٣ س^{٣} – ٤ س^{٢} + ٦ س + ٥

الحل

ص$'$ = ٤ س^{٣} + ٩ س^{٢} – ٨ س + ٦

، ص$''$ = ١٢ س^{٢} + ١٨ س – ٨ ، ص$'''$ = ٢٤ س + ١٨

تدريب [٤] أوجد المشتقة الخامسة للدالة :

ص = ٣ س^{٢} – حا ٢ س

مثال [٥] إذا كان : س ص = حتا س أثبت أن : س $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + س ص = ٠

الحل

بالإشتقاق مرتين بالنسبة إلى س نجد :

س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = – حا س

س $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ = – حتا س = – س ص

∴ س $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + س ص = ٠

تدريب [٥] إذا كان : ص = س حا س أثبت أن : س $\frac{ء^{٣}ص}{ء س^{٣}}$ + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص = ٠

تمارين (٣)

(١) أبحث قابلية الدالة د : د (س) =
- س^{٢} + ٣ ، س < ١
- ٥ س – ٩ ، ١ ≤ س ≤ ٣
- س^{٢} – س ، س > ٣

(٢) إذا كانت الدالة د : د (س) =
- س^{٢} – ل ، س ≥ ١
- ٢ ل س + م ، س < ١

قابلة للإشتقاق عند س = ١ أوجد قيمة كل من ل ، م

(٣) إذا كان للدالة د : د (س) =
- ل س^{٣} – ١ ، س ≤ ١
- $\frac{م\ س^{٣}}{|\ س\ |}$ + ﻫ س ، س > ١

قابلة للإشتقاق مرتين عند س = ١ أوجد قيمة كل من : ل ، م

(٤) إذا كانت الدالة د : د (س) =
- ل س^{٢} + ك س + ﻫ ، س ≥ ٢
- ٧ س – ﻫ ، س < ٢

قابلة للإشتقاق عند س = ٢ ، و متوسط تغيرها عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ٦,٥

(٥) إذا كان : ص = س^{٣} + ٢ ، ع = س^{٢} + ٣ أوجد $\frac{ء^{٢}ع}{ء ص}$ عندما س = ٢

(٦) إذا كان : $\text{س}^{\text{م}}\,\text{ص}^{\text{ن}} = ١$ حيث م ، ن ثوابت

أثبت أن : $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^٢} = \frac{\text{م ص}\,(\text{م} + \text{ن})}{\text{ن}^٢\,\text{س}^٢}$

(٧) إذا كان : $\text{س}^{\text{م}}\,\text{ص}^{\text{ن}} = (\text{س} + \text{ص})^{\text{م} + \text{ن}}$ حيث م ، ن ثوابت

أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

(٨) إذا كانت : $\text{ص} = (\text{س} + \sqrt{١ + \text{س}^٢})^{٥}$ أثبت أن :

$(١ + \text{س}^٢)\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^٢} + \text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٢٥\,\text{ص} = ٠$

(٩) إذا كانت : ص = د (س) ، ع = ر (س) أثبت أن :

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^٢} = \frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء}\text{ع}^٢} \times \left(\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\right)^٢ + \frac{\text{ء}^٢\text{ع}}{\text{ء}\text{س}^٢} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$

(١٠) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ حيث ق (س) ، ر (س) دالتان قابلتان

بالإشتقاق بالنسبة عند س = ل ، $\text{د}'(\text{ل}) = ٠$ أثبت أن : $\text{د}(\text{ل}) = \frac{\text{ق}'(\text{ل})}{\text{ر}'(\text{ل})}$

(١١) أوجد معدل تغير $\sqrt{٨ + \text{س}^٢}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ عندما س = ١

(١٢) إذا كان : $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ١ + ٢\,\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^٢ + ٣$

أوجد $\frac{\text{ء}^٢\text{ع}}{\text{ء}\text{ص}^٢}$ عندما س = ١

(١٣) إذا كانت : ص = حتا ٢ س أثبت أن : $\left(\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^٢}\right)^٢ + ٤\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^٢ = ١٦$

(١٤) إذا كانت : ص = س حتا س − حا س أوجد $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^٢}$ عندما $\text{س} = \frac{\text{ط}}{٢}$

(١٥) إذا كانت : $\text{ص} = \text{ل}\,\text{س}^٣ + \text{م}\,\text{س}^٢$ ، و كان : $\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^٣} = ١٢$

، $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^٢} = ٦$ عندما س = ١ أوجد قيمة كل من : ل ، م

(١٦) إذا كانت : $\text{د}''(\text{س}) + \text{د}'(\text{س}) = \text{س}^٣ + ٥\,\text{س}^٢ + \text{س} + ٢$

أوجد $\text{د}'(\text{س})$

تطبيقات على المشتقة الأولى

أولاً : التطبيق الهندسى :

تذكر ما يلى :

* طرق إيجاد ميل الخط المستقيم

(١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) هو : $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

(٢) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : ص = م س + حـ

فإن ميل الخط المستقيم هو : م

(٣) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : أ س + ب ص + حـ = ٠

فإن ميل الخط المستقيم هو : $م = \frac{-أ}{ب}$

(٤) ميل المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ

هو : م = طا هـ

و يكون : م = ٠ إذا كان المستقيم يوازى محور السينات

، م > ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة الإتجاه الموجب لمحور مع السينات

، م < ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

* ملاحظة :

إذا كان : $م_١$ ، $م_٢$ ميلا المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن :

$ل_١ // ل_٢$ إذا كان : $م_١ = م_٢$ ، $ل_١ \perp ل_٢$ إذا كان : $م_١ \times م_٢ = -١$

* قواعد عامة

(١) أى نقطة تقع على منحنى تحقق معادلته

(٢) لإيجاد نقط تقاطع منحنيين متقاطعين تحل معادلتيهما معاً

(٣) ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٤) العمودى على منحنى عند نقطة عليه هو المستقيم العمودى على المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٥) زاوية التقاطع بين مستقيم و منحنى هى الزاوية المحصورة بين المستقيم و المماس للمنحنى عند نقطة التقاطع

(٦) زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين المماسيين للمنحنى عند نقط تقاطع المنحنيين ، إذا كان قياس الزاوية بين المماسيين لمنحنيين عند نقط تقاطع المنحنيين قائمة كان المنحنيان متقاطعيين على التعامد

* إستخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل المماس لمنحنى و العمودى عليه

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$)

الواقعة عليه = $[ص']_{(س_١ ، ص_١)}$

(٢) ميل العمودى على منحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$)

الواقعة عليه = $\frac{١}{[ص']_{(س_١ ، ص_١)}}$

(٣) المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) الواقعة عليه يصنع زاوية قياسها هـ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فإن :

طا هـ = $[ص']_{(س_١ ، ص_١)}$

و يكون : $[ص']_{(س_١ ، ص_١)}$

= صفر إذا كان المماس يوازى محور السينات

> ٠ إذا كان المماس يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

< ٠ إذا كان المماس يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

غير معرف ($\frac{١}{٠}$) إذا كان المماس يوازى محور الصادات

* معادلتا المماس لمنحنى و العمودى عليه :

(١) معادلة المماس للمنحنى ص = د (س) عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هى :

ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$) حيث : م = $[ص']_{(س_١ ، ص_١)}$

(٢) معادلة العمودى للمنحنى ص = د (س) عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هى :

ص − $ص_١$ = $\frac{١}{م}$ (س − $س_١$) حيث : م = $[ص']_{(س_١ ، ص_١)}$

مثال [١] أوجد معادلة كل من المماس و العمودى عليه للمنحنى

$س^{٢}$ – ٤ س + $ص^{٢}$ = ٢١ عند النقطة (٥ ، ٤)

الحل

∵ ٢ س – ٤ – ٢ ص ص/ = ٠ ∴ ص/ = $\frac{٢ - س}{ص}$

، عند النقطة (٥ ، ٤) : ميل المماس = – $\frac{٣}{٤}$ ، ميل العمودى عليه = $\frac{٤}{٣}$

∴ معادلة المماس هى : ص – ٤ = – $\frac{٣}{٤}$ (س – ٥)

أى : ٣ س + ٤ ص – ٣١ = ٠

، معادلة العمودى عليه هى : ص – ٤ = $\frac{٤}{٣}$ (س – ٥)

أى : ٣ ص – ٤ س + ٨ = ٠

تدريب [١] أوجد معادلة كل من المماس و العمودى عليه للمنحنى

$س^{٢}$ + ٢ س – ٣ ص + $ص^{٢}$ + ٢ = ٠ عند النقطة (–٢ ، ١)

مثال [٢] أوجد النقط الواقعة على المنحنى $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٨ و التى يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم ص = ٤ – س

الحل

٢ س + ٢ ص ص/ = ٠ ∴ ص/ = – $\frac{س}{ص}$ (١)

، ∵ ميل المستقيم = – ١ ∴ ميل المماس (⊥ المستقيم) = ١

∴ من (١) ينتج : ص = – س

، من معادلة المنحنى ينتج : $س^{٢}$ = ٤ ∴ س = ± ٢ ، ص = ∓ ٢

∴ النقط هى : (٢ ، – ٢) ، (– ٢ ، ٢)

تدريب [٢] أوجد النقط الواقعة على المنحنى $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + ٣ س + ص = ٠ و التى يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم ٣ ص + س = ١

مثال [٣] إذا كان المنحنيان ص = $س^{٢}$ + ك س + ل ، ص = $س^{٣}$ – $س^{٢}$ – س + م متماسان عند النقطة (– ١ ، ٠) أوجد قيم ك ، ل ، م ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما عند هذه النقطة

الحل

∵ النقطة (– ١ ، ٠) تقع على كل من المنحنين فهى تحقق معادلتهما

∴ ٠ = ١ – ك + ل ∴ ك – ل = ١ (١)

، ٠ = – ١ – ١ + ١ + م ∴ م = ١

، ص/ للمنحنى الأول = ٢ س + ك

، عند النقطة (– ١ ، ٠) : ص/ = – ٢ + ك

ص/ للمنحنى الثانى = ٣ $س^{٢}$ – ٢ س – ١

، عند النقطة (– ١ ، ٠) : ص/ = ٣ + ٢ – ١ = ٤

∴ – ٢ + ك = ٤ و منها : ك = ٦

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل = ٥

، ∵ المماس المشترك يمر بالنقطة (– ١ ، ٠) و ميله = ٤

∴ معادلة المماس المشترك هى : ص = ٤ (س + ١)

أى : ٤ س – ص + ٤ = ٠

مثال [٣] إذا كان المنحنيان ص = $س^{٢}$ + ك س + ل ، ص = م س – $س^{٢}$ متماسان عند النقطة (٢ ، ٨) أوجد قيم ك ، ل ، م ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما عند هذه النقطة

تمارين (٤)

(١) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص$'$ = س − ١ يساوى − $\frac{١}{٢}$ أوجد معادلة هذا المماس

(٢) أوجد معادلة كل من المماس و العمودى عليه للمنحنى س^{٢} − ٢ س ص − ص^{٢} = ١ عند النقطة (١ ، ٠)

(٣) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} و التى يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة (٤ ، ٠)

(٤) أثبت أن : المماس لمنحنى الدالة ص = س | س | − ٣ س عند النقطة س = ٢ يوازى العمودى على المنحنى عند النقطة س = − ١ و أوجد معادلة كل منهما

(٥) أوجد قيم ك ، ل ، ر حتى يكون لمنحنين الدالتين : ص = ك س^{٣} + ل س ، ص = ر س^{٢} − س مماس مشترك عند النقطة (− ١ ، ٢) و أوجد معادلته

(٦) أثبت أن : المنحنيين ص = س^{٢} ، ص = ١ − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} متقاطعين على التعامد (المماسات متعامدة)

(٧) أوجد قيم ك ، ل ، ر الحقيقية حتى يكون المنحنيين ص = ك س^{٢} ، ص = ل − ر س^{٢} متقاطعين على التعامد عند النقطة ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

(٨) أوجد معادلتى المماسيين للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٥ و الذى كل منهما يميل على المحور السينى الموجب بزاوية ظلها يساوى ٢

(٩) أوجد معادلة المماس الذى يمر بالنقطة (١ ، − ٤) و يمس المنحنى ص = س^{٢} − س

(١٠) إذا كان العمودى للمنحنى ص = ٤ − س^{٢} عند النقطة (١ ، ٣) يقطع المنحنى مرة أخرى عند النقطة ل أوجد معادلة المماس عند النقطة ل

(١١) أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات و المماس و العمودى عند النقطة (− ١ ، ٢) للمنحنى ٤ ص = ٩ − س^{٢}

(١٢) نقطة تتحرك على المنحنى ص = س^{٢} − ٥ س أوجد موقع هذه النقطة عند اللحظة التى يصنع فيها المماس و العمودى عليه مع محور السينات مثلث متساوى الساقين

(١٣) أوجد النقطة الواقعة على محور الصادات بحيث يصنع المماسان المرسومان منها للمنحنى ص = − س^{٢} و المستقيم المار بنقطة التماس مثلث متساوى الأضلاع

(١٤) أوجد معادلتى المماس و العمودى عليه للمنحنى ص = حا ٢ س − حتا ٤ س عند س = $\frac{١}{٤}$ ط

(١٥) علق سلك كهربائى بين حاملين رأسيين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ إرتفاع كل منهما ٣٠ م ، و المسافة بينهما ٣٦ م فى نفس المستوى الأفقى بحيث يصنع السلك شكلاً لدالة تربيعية فإذا ربط الحامل $\overline{\text{أ ب}}$ بسلك مشدود عمودياً على منحنى السلك الكهربائى عند أ ، و ربط الطرف الآخر عند ل ، ب ، ء على إستقامة واحدة و كان أقل إرتفاع لسلك الكهرباء عن سطح الأرض ١٨ م أوجد طول $\overline{\text{ل ب}}$ ، و إذا قطع المماس عند أ $\overline{\text{حـ ء}}$ فى نقطة ر أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب و ر

ثانياً : المعدلات الزمنية المرتبطة

* إذا كانت : ص = ص (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ هو معدل تغير ص بالنسبة إلى س

* إذا وجدت علاقة بين عدة متغيرات مثل : س ، ص ، ع ، ٠٠٠٠
باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن تنتج علاقة بين المعدلات الزمنية لهذه المتغيرات :
$\frac{ءس}{ءن}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ ، $\frac{ءع}{ءن}$

* إذا كان : ص = ص (س) ، س = ر (ن) فإن :
$\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \cdot \frac{ءس}{ءن}$

* خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية :

- تحديد المعطى والمطلوب مع الرسم إن أمكن
- إيجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيرات في المعطى والمطلوب
- اشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن
- التعويض بالمعطى لإيجاد المطلوب

* ملاحظات :
* إذا كان معدل التغير يزداد تكون إشارته موجبة { مثلاً : يتمدد ، يبتعد ، يصب ماء }
* إذا كان معدل التغير يتناقص تكون إشارته سالبة { مثلاً : يتسرب ، يقترب ، ينزلق }
* العلاقة الرياضية يمكن أن تكون { محيط ، مساحة ، حجم ، نظرية فيثاغورث ، تشابه مثلثات ، أو علاقة معطاة في السؤال . . . }
* التعويض بالمعطى يكون بعد اشتقاق العلاقة

مثال [١] تتحرك نقطة على المنحنى $س^٣ + س ص + ص^٣ = ٥$ بحيث يتزايد إحداثيها الصادى بمعدل ٢ وحدة / ث أوجد معدل تغير إحداثيها السينى عند النقطة (٢ ، – ١)

الحل

$٣ س^٢ \frac{ءس}{ءن} + ص \frac{ءس}{ءن} + س \frac{ءص}{ءن} + ٣ ص^٢ \frac{ءص}{ءن} = ٠$

$\because \frac{ءص}{ءن} = ٢$ عند (٢ ، – ١)

$\therefore ١٢ \frac{ءس}{ءن} + ٤ - \frac{ءس}{ءن} + ٦ = ٠$ و منها : $\frac{ءس}{ءن} = - \frac{١٠}{١١}$ وحدة / ث

تدريب [١] تتحرك نقطة على المنحنى $س^٣ + س ص + ص^٣ = ٥$ بحيث يتناقص إحداثيها السينى بمعدل $\frac{١٠}{١١}$ وحدة / ث أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى عند النقطة (٢ ، – ١)

مثال [٢] رجل طوله ١٨٠ سم يسير بسرعة ٦ م / د فى خط مستقيم متجهاً نحو قاعدة مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٣٠٠ سم أوجد معدل تغير طول ظل الرجل

الحل

فى الشكل المقابل : ٲ ب = إرتفاع المصباح ، ء هـ = طول الرجل
، س = ب ء = المسافة التى تحركها الرجل ، ص = ء حـ = طول ظل الرجل
، ف = ٲ ب = بعد رأس الرجل عن المصباح
، المثلثين ٲ ب حـ ، هـ ء حـ متشابهين

$\therefore \frac{س + ص}{ص} = \frac{٣٠٠}{١٨٠} = \frac{٥}{٣}$ $\therefore ٣ س + ٣ ص = ٥ ص$

$\therefore ٣ س = ٢ ص$ $\therefore ٣ \frac{ءس}{ءن} = ٢ \frac{ءص}{ءن}$ $\therefore \frac{ءص}{ءن} = - ٦ \times \frac{٣}{٢} = - ٩$ م / د

تدريب [٢] رجل طوله ١٥٠ سم يسير بسرعة ٢ م / د فى خط مستقيم متجهاً نحو قاعدة مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٣٠٠ سم أوجد معدل تغير طول ظل الرجل

مثال [٣] إذا كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم و كان طول الضلع الأول يتناقص بمعدل $\frac{1}{2}$ سم / دقيقة ، و طول الضلع الثانى يتزايد بمعدل ١ سم / دقيقة أوجد : معدل تزايد مساحة المثلث بعد ٣ دقائق
، الزمن الذى بعده تنعدم الزيادة

الحل

من الشكل المقابل : بعد ن دقيقة

ب ء = ٨ − $\frac{1}{2}$ ن ، ب هـ = ٦ + ن

مـ (△ ء ب هـ) " م " = $\frac{1}{2}$ (٨ − $\frac{1}{2}$ ن) (٦ + ن)

∴ م = $\frac{1}{2}$ (٤٨ + ٥ ن − $\frac{1}{2}$ ن^{2})

، $\frac{ء م}{ء ن}$ = $\frac{1}{2}$ (٥ − ن)

بعد ٣ دقائق يكون : $\frac{ء م}{ء ن}$ = $\frac{1}{2}$ (٥ − ٣) = ١ سم / دقيقة

، $\frac{ء م}{ء ن}$ = ٠ " تنعدم " عندما : ٥ − ن = ٠ ∴ ن = ٥ دقائق

مثال [٣] إذا كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ١٢ سم ، ١٦ سم و كان طول الضلع الأول يزداد بمعدل ٢ سم / دقيقة ، و طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم / دقيقة أوجد : معدل تزايد مساحة المثلث بعد دقيقتين
، الزمن الذى بعده تنعدم الزيادة

تمارين (٥)

(١) تتحرك نقطة على المنحنى ص = ٥ س − س^{٣} بحيث يتناقص إحداثيها الصادى بمعدل $\frac{1}{2}$ وحدة / ث أوجد معدل تغير ميل المنحنى بالنسبة للزمن عند س = ٣

(٢) تتحرك نقطة على المنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٨ عين موضع النقطة عند اللحظة التى يتساوى فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مع معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن

(٣) صفيحة مستطيلة الشكل طولها يساوى $\frac{4}{5}$ طول قطرها تنكمش بإنتظام فينكمش طولها فى لحظة بمعدل ١٠ سم / ث و تنكمش مساحتها فى نفس اللحظة بمعدل ٣٠ سم^{٢} / ث أوجد مساحتها فى هذه اللحظة

(٤) مستطيل مساحته ثابتة و تساوى ٨ سم^{٢} يزداد طوله بمعدل ٠,٤ سم فى الثانية كم يكون عرض المستطيل عند اللحظة التى يكون معدل تناقص هذا العرض ٠,٠٥ سم فى الثانية

(٥) يرتفع بالون رأسياً لأعلى بسرعة ثابتة مقدارها ١٥ م / ث و عندما كان البالون على إرتفاع ٩٠ م مرت تحته مباشرة سيارة و واصلت سيرها فى خط مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها ٢٥ م / ث أوجد المعدل الذى تزداد به المسافة بين السيارة و البالون بعد ثانيتين من مرور السيارة تحت البالون

(٦) تمر طائرة تطير موازية لسطح الأرض على إرتفاع ٤ كم فوق محطة رادار بعد وقت قصير أظهرت أجهزة الرادار أن المسافة بين الطائرة و المحطة تساوى ٥ كم و أن المسافة بين الطائرة و المحطة تزيد بمعدل ٣٠٠ كم / س أوجد السرعة الأفقية التى تتحرك بها الطائرة عند هذه اللحظة

(٧) أبحرت سفينة من ميناء الساعة التاسعة صباحاً متجه نحو الغرب بسرعة ٢٠ كم / س و بعد ساعة أبحرت سفينة أخرى من نفس الميناء بسرعة ٤٠ كم / س فى إتجاه ٦٠° شمال الغرب أوجد معدل التباعد بين السفينتين الساعة ١١ صباحاً

(٨) رجل طوله ١٧٠ سم يسير بسرعة ٤ م / د فى خط مستقيم متجهاً نحو قاعدة مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٦٨٠ سم أوجد معدل تغير طول ظل الرجل ، معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٦٨٠ سم من قاعدة المصباح

(٩) عمود إنارة طوله ١٥ مترا أعلاه مصباح قذفت كرة رأسيا إلي أعلي بسرعة ٥ أمتار / ث من مسافة ١٢ مترا من قاعدة العامود أوجد معدل ابتعاد الكرة علي الأرض من قاعدة العامود عند منتصف الثانية الأولى

(١٠) تتمدد قطعة من المعدن علي هيئة متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم و ارتفاعها ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦ سم^{٣} / دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,٠١ سم / دقيقة فأوجد أبعاد قطعة المعدن

(١١) يستند قضيب ﺃ ب طوله ١٠ م بطرفه ﺃ على أرض أفقية و بإحدى نقطه حـ على حائط رأسى إرتفاعه ٦ م ، إذا أنزلق الطرف ﺃ مبتعداً عن الحائط بمعدل ١,٥ م / د أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما يصل إلى حافة الحائط

(١٢) يصعد رجل طوله ١٧٠ سم بسرعة منتظمة ٦ م / د أعلى منحدر يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٧}{٢٤}$ و طوله ٢٥ م و هناك مصباح مثبت على إرتفاع $\frac{١}{٤}$ ١١ م فوق المستوى الأفقى المار بقاعدة المنحدر رأسياً فوق أعلى نقطة للمنحدر أوجد معدل إنكماش طول ظل الرجل ، معدل إقتراب نهاية ظل الرجل من أعلى نقطة للمنحدر

(١٣) يرفع رجل دلواً مملوءاً بالأسمنت إلى سقالة على إرتفاع ٨ م فوق رأسه بواسطة حبل طوله ١٧ م يمر على بكرة ملساء مثبتة فى السقالة و كان الرجل يحفظ الطرف الخالص للحبل أفقياً فى مستوى رأسه و يمشى أفقياً بسرعة ٤ م / د أوجد السرعة التى يرتفع بها الدلو عندما يمشى الرجل ٦ م

(١٤) برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطره ١٠ م و إرتفاعه ١٨ م فإذا كان معدل دخول البترول فى البرميل $\frac{١٠٠٠}{ل + ١}$ م^{٣} / د حيث ل إرتفاع البترول عند أى لحظة أوجد معدل إرتفاع البترول عندما يمتلئ نصف البرميل

(١٥) يعبر رجل كوبرى يعلو سطح الماء بمقدار ١٢ م بسرعة منتظمة ٣ م / د ، شاهد قارب يسير فى إتجاه عمودى على الكوبرى بسرعة منتظمة ٦ م / د فى اللحظة التى كان فيها تحته تماماً أوجد المعدل الذى يبتعد به كل منهما عن الآخر بعد ٦ دقائق من اللحظة التى كانا فيها على خط رأسى واحد

(١٦) مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٠ سم و قياس الزاوية بينهما يساوى (هـ) فإذا تغير (هـ) بمعدل ٣ ° فى الدقيقة أوجد معدل تغير مساحة المثلث عند (هـ) = ٦٠ °

(١٧) إذا كانت ص سم^{٢} هى مساحة سطح مثلث متساوى الساقين و قائم الزاوية و علم أن $\frac{ءص}{ءن}$ = ٣٢ سم^{٢} / ث عند اللحظة التى كان عندها طول كل من ساقى المثلث = ٨ سم أوجد معدل تغير محيط هذا المثلث

سلوك الدالة و رسم منحانها

تزايد و تناقص الدوال :

تعريف (١) :

يقال أن الدالة د (س) متزايدة على] ٢ ، ب [إذا كان : د ($س_١$) < د ($س_٢$)

لكل $س_١$ < $س_٢$ فى هذه الفترة

و يقال أن الدالة د (س) مطردة التزايد على] ٢ ، ب [إذا كان : د ($س_١$) ≤ د ($س_٢$)

لكل $س_١$ < $س_٢$ فى هذه الفترة

و هذا التعريف يعنى أن : الدالة تكون متزايدة فى فترة ما إذا كانت قيمتها تتزايد مع تزايد س فى هذه الفترة ، و تكون مطردة التزايد إذا كانت قيمتها تتزايد أو تثبت مع تزايد س

تعريف (٢) :

يقال أن الدالة د (س) متناقصة على] ٢ ، ب [إذا كان : د ($س_١$) > د ($س_٢$)

لكل $س_١$ < $س_٢$ فى هذه الفترة

و يقال أن الدالة د (س) مطردة التناقص على] ٢ ، ب [إذا كان : د ($س_١$) ≥ د ($س_٢$)

لكل $س_١$ < $س_٢$ فى هذه الفترة

و هذا التعريف يعنى أن : الدالة تكون متناقصة فى فترة ما إذا كانت قيمتها تتناقص مع تزايد س فى هذه الفترة ، و تكون مطردة التناقص إذا كانت قيمتها تتناقص أو تثبت مع تزايد س

ملاحظات :

* تبقى تعريفات التزايد و التناقص كما هى إذا أستبدلت] ٢ ، ب [بأى من : [٢ ، ب] أو [٢ ، ب [أو] ٢ ، ب]
* إذا كانت النقطة س = حـ تفصل بين فترات التزايد و التناقص بحيث أن الدالة تتزايد على يمين هذه النقطة و تتناقص على يسارها فإن هذا يعنى أن قيمة الدالة تكون أقل ما يمكن بالنسبة لقيمتها على يمين و يسار هذه النقطة
أما إذا كانت الدالة تتناقص على يمين النقطة س = حـ و تتزايد على يسارها فإن هذا يعنى أن قيمة الدالة تكون أكبر ما يمكن بالنسبة لقيمتها على يمين و يسار هذه النقطة

إستخدام المشتقة الأولى لدراسة تزايد الدالة :

نظرية (١) :

١ – إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق فى] ٢ ، ب [و كانت متزايدة فى هذه الفترة
فإن : د (س) ≥ ٠ لكل س ∈] ٢ ، ب [

٢ – إذا كانت د/ (س) > ٠ فى] ٢ ، ب [فإن : د (س) تكون د متزايدة فى هذه الفترة

٣ – إذا كانت د/ (س) ≥ ٠ فى] ٢ ، ب [
فإن : د (س) تكون د متزايدة فى هذه الفترة

د (س)
تناقصية تزايدية
د/ (س) – – – + + +

و بالمثل فى حالة التناقص :

١ – إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق فى] ٢ ، ب [و كانت متناقصة فى هذه الفترة
فإن : د (س) ≤ ٠ لكل س ∈] ٢ ، ب [

٢ – إذا كانت د/ (س) < ٠ فى] ٢ ، ب [فإن : د (س) تكون د متناقصة فى هذه الفترة

٣ – إذا كانت د/ (س) ≤ ٠ فى] ٢ ، ب [فإن : د (س) تكون د متناقصة فى هذه الفترة

ملاحظات :

* الدالة تتزايد فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أى نقطة فى هذه الفترة موجباً أى أن المماس يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات
، الدالة تتناقص فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أى نقطة فى هذه الفترة سالباً أى أن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات
* لإيجاد فترات التزايد نحل المتباينة : د/ (س) > ٠
، لإيجاد فترات التناقص نحل المتباينة : د/ (س) < ٠

أما إذا تعذر حل مثل هذه المتباينات نلجأ إلى بحث إشارة د/ (س) بإتباع الخطوات التالية :

(١) نوجد أصفار د/ (س) " نضع د/ (س) = ٠ " و هذه القيم هى التى تفصل بين فترات التزايد و فترات التناقص
(٢) نحدد الفترات التى ينقسم إليها مجال الدالة بهذه القيم
(٣) نعين إشارة د/ (س) فى كل فترة من هذه الفترات

مثال [١] عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة :

$د(س) = (س - ٢)(س + ١)^{٢}$

الحل

$\because د(س) = (س - ٢)(س + ١)^{٢}$

$\therefore د'(س) = (س + ١)^{٢} + ٢(س + ١)(س - ٢)$

$= ٣(س + ١)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما : $س = ١$ ، $س = -١$

$\because د'(س) > ٠$ فى $]١ ، \infty[$ ، $]-\infty ، -١[$

$\therefore د(س)$ تزايدية فى $]١ ، \infty[$ ، $]-\infty ، -١[$

، $\because د'(س) < ٠$ فى $]-١ ، ١[$ $\therefore د(س)$ د تناقصية فى $]-١ ، ١[$

د(س)	↗		↘		↗
س		-١		١	
د'(س)	+	٠	–	٠	+

تدريب [١] عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة :

$د(س) = (س - ١)(س - ٢)^{٢}$

القيم العظمى و الصغرى المحلية لدالة :

* **نظرية (١) :**

إذا كانت : الدالة د (س) معرفة على [ﺃ ، ب] و كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية عند $س_{١} \in]ﺃ ، ب[$ فإن $د'(س_{١}) = ٠$

* **نظرية (٢) :**

إذا كانت : الدالة د (س) متصلة و كان :

[١] $د'(س) \geq ٠$ لقيم س على يسار $س_{١}$ مباشر
، $د'(س) \leq ٠$ لقيم س على يمين $س_{١}$ مباشرة
فإن : $س_{١}$ نقطة عندها قيمة عظمى محلية

ع م
د'(س)
+ –
س
س١

[٢] $د'(س) \leq ٠$ لقيم س على يسار $س_{١}$ مباشرة
، $د'(س) \geq ٠$ لقيم س على يمين $س_{١}$ مباشرة
فإن : $س_{١}$ نقطة عندها قيمة صغرى محلية

ص م
د'(س)
– +
س
س١

نظرية (٣) :

إذا كانت الدالة د (س) قابلة للإشتقاق و كان :

[١] $د'(س) = ٠$ ، $د''(س_{١}) > ٠$ فإن : $(س_{١} ، د(س_{١}))$ نقطة صغرى محلية

[٢] $د'(س) = ٠$ ، $د''(س_{١}) < ٠$ فإن : $(س_{١} ، د(س_{١}))$ نقطة عظمى محلية

ملاحظات :

* إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق عند $س_{١}$ و كانت : $د'(س_{١}) = ٠$ فليس من الضرورى أن تكون $س_{١}$ نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية
* قد تكون $س_{١}$ نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية و مع ذلك $د'(س_{١})$ غير موجودة
* إذا كانت : $د''(س_{١}) = ٠$ نستخدم المشتقة الأولى للتحقق من وجود نقط للدالة عندها قيم عظمى أو صغرى

مثال [٢] أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة :

$د(س) = (س - ١)(س - ٢)^{٢}$

الحل

$\because د(س) = (س - ١)(س - ٢)^{٢} = س^{٣} - ٥س^{٢} + ٨س - ٤$

$\therefore د'(س) = ٣س^{٢} - ١٠س + ٨ = (٣س - ٤)(س - ٢)$

، $\because د'(س) = ٠$ عندما : $س = \frac{٤}{٣}$ ، $س = ٢$

، $د''(س) = ٦س - ١٠$

، $\because د''(\frac{٤}{٣}) = -٢ < ٠$ $\therefore (\frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٢٧})$ نقطة قيمة عظمى محلية

، $د''(٢) = ٢ > ٠$ $\therefore (٢ ، ٠)$ نقطة قيمة صغرى محلية

تدريب [٢] أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة :

$د(س) = (س - ٢)(س + ١)^{٢}$

لنقط الحرجة للدالة :

يقال أن س١ نقطة حرجة للدالة د (س) إذا كانت تحقق أحد الشرطين :

(١) د/ (س١) لها وجود و تساوى الصفر (٢) د/ (س١) غير موجودة

ملاحظات :

* نقطة القيم العظمى المحلية و الصغرى المحلية للدالة هى نقط حرجة لها لأن الدالة عند هذه النقط إما أنها غير قابلة للإشتقاق أو قابلة للإشتقاق و مشتقتها تساوى صفر
* ليس كل نقطة حرجة هى نقطة قيمة عظمى أو صغرى محلية لها

مثال [٣] عين النقط الحرجة ثم اختبر كل منها من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية للدالة :

$$د(س) = \begin{cases} ٣ - ٤س - س^{٢} &، س \le ١ \\ ٢س - ٤ &، س > ١ \end{cases}$$

الحل

$$\because د(س) = \begin{cases} ٣ - ٤س - س^{٢} &، س \le ١ \\ ٢س - ٤ &، س > ١ \end{cases} \quad \therefore د'(س) = \begin{cases} -٤ - ٢س &، س < ١ \\ \text{غير معرفة} &، س = ١ \\ ٢ &، س > ١ \end{cases}$$

لأن : $\because$ د/ (١⁻) = −٦ ، د/ (١⁺) = ٢

$\therefore$ د (س) غير قابلة للإشتقاق عند س = ١ $\therefore$ (١ ، −٢) نقطة حرجة

، $\because$ د/ (س) > ٠ عندما : س < ١ ، د/ (س) > ٠ عندما : س > ١

$\therefore$ (١ ، −٢) نقطة قيمة صغرى محلية

، $\because$ د (س) = ٠ عندما : −٤ − ٢س = ٠ أى عندما : س = −٢

، $\because$ د/ (س) > ٠ عندما : س < −٢ ، د/ (س) < ٠ عندما : −٢ < س < ١

$\therefore$ (٢ ، −٧) نقطة قيمة عظمى محلية

تدريب [٣] عين النقط الحرجة ثم اختبر كل منها من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية

للدالة : $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ &، س \le -١ \\ س + ١ &، س > -١ \end{cases}$

القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة :

تعريف (١) :

إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [ﻡ ، ب] فإن :

القيمة العظمى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة

{ د (س) : س ∈ [ﻡ ، ب] }

أى أنها تلك القيمة ع بحيث أنه توجد نقطة س١ ∈ [ﻡ ، ب] بحيث أن :

د (س١) = ع ، ع ≥ د (س) لكل س ∈ [ﻡ ، ب]

تعريف (٢) :

إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [ﻡ ، ب] فإن :

القيمة الصغرى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أصغر قيمة فى مجموعة قيم الدالة

{ د (س) : س ∈ [ﻡ ، ب] }

أى أنها تلك القيمة ص بحيث أنه توجد نقطة س١ ∈ [ﻡ ، ب] بحيث أن :

د (س١) = ص ، ص ≤ د (س) لكل س ∈ [ﻡ ، ب]

ملاحظات :

* القيمة العظمى (أو الصغرى) المحلية لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى جوار صغير أى جزء صغير من فترة تعريف الدالة
  أما القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة للدالة فهى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى كل فترة التعريف
* القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة هى إحدى القيم العظمى (أو الصغرى) المحلية و لكنها أكبر (أصغر) هذه القيم جميعاً

خطوات التعيين :

* نوجد المشتقة الأولى
* نعين النقط التى عندها المشتقة الأولى = صفر و تنتمى للفترة المعطاه
* نعين النقط التى عندها المشتقة غير موجودة و تنتمى للفترة المعطاه
* نوجد قيم الدالة عند النقط التى حصلنا عليها جميعاً من الخطوتين السابقتين و كذا قيم الدالة عند طرفى الفترة المعطاه
* نوجد أكبر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة العظمى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه و نوجد أصغر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة الصغرى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه

مثال [٤] أوجد القيمة العظمى و الصغرى المطلقة للدالة د (س) = س^٢ + ٦ س فى [– ٥ ، – ١]

الحل

د/ (س) = ٢ س + ٦ ، د/ (س) = ٠ عندما : س = – ٣

∵ د (– ٣) = – ٩ ، د (– ٥) = – ٥ ، د (– ١) = – ٥

∴ القيمة العظمى المطلقة = – ٥ عند س = – ٥ ، س = – ١

، القيمة الصغرى المطلقة = – ٩ عند س = – ٣

تدريب [٤] أوجد القيمة العظمى و الصغرى المطلقة للدالة

د (س) = ٢ س^٤ – س^٢ + ١ فى [– ١ ، ١]

تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة :

هى مشكلات حياتية تصاغ فى قالب رياضى يكون الهدف منها الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما

خطوات الحل :

(١) نعبر عن المتغير المراد إيجاد أكبر قيمة أو أصغر قيمة له كدالة فى متغير واحد آخر " المستقل " و ذلك بالإستعانة بمعطيات المسألة

(٢) نحدد مجال المتغير المستقل فيكون هو الفترة المراد إيجاد القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة فيها

(٣) نوجد النقط الحرجة للدالة و التى تنتمى للفترة السابقة

(٤) نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة السابقة وعند طرفى الفترة لمعرفة القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة

مثال [٥] وجد احد مصانع الأجهزة الكهربية انه يكسب ٣٠ جنيه في كل جهاز إذا كان إنتاجه فى الشهر ٥٠ جهازا فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فان الربح فى الجهاز يقل ٥٠ قرشا عن كل جهاز زيادة أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع في الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن

الحل

نفرض أن عدد الأجهزة الزائدة = س جهاز ، الربح = ص جنيه

∵ الربح = عدد الأجهزة × ربح الجهاز الواحد

∴ ص = (٥٠ + س) (٣٠ – ½ س) = ١٥٠٠ + ٥ س – ½ س^٢

∴ ص/ = ٥ – س ، ص// = – ١ ، ∵ ص/ = ٠ عندما س = ٥

، ص// (٥) = – ١ < ٠

∴ ص// تكون أكبر ما يمكن عندما س = ٥

∴ عدد الأجهزة التى تحقق أكبر ربح = ٥٠ + ٥ = ٥٥ جهاز

تدريب [٥] وجد احد مصانع الأجهزة الكهربية انه يكسب ٢٠ جنيه في كل جهاز إذا كان إنتاجه فى الأسبوع ٨٠٠ جهازا فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فان الربح فى الجهاز يقل قرشين عن كل جهاز زيادة أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع في الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن

التحدب إلى أعلى و التحدب إلى أسفل و نقط الإنقلاب :

وتر المنحنى :

هو القطعة المستقيمة التى تصل بين أى نقطتين على المنحنى

تعريف (١) " التحدب إلى أعلى " :

يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أعلى إذا كان المنحنى يقع أعلى جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء

تعريف (٢) " التحدب إلى أسفل " :

يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أسفل إذا كان المنحنى يقع أسفل جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء

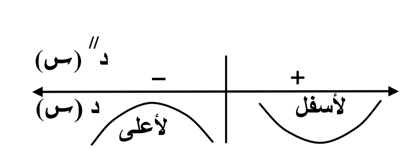
ملاحظات :

* جزء المنحنى المحدب إلى أعلى كما أنه يقع أعلى أوتاره فإنه يقع أسفل مماساته عند جميع نقطه
* جزء المنحنى المحدب إلى أسفل كما أنه يقع أسفل أوتاره فإنه يقع أعلى مماساته عند جميع نقطه

نظرية :

١– إذا كانت د// (س) < ٠ فى] أ ، ب [
فإن المنحنى يكون محدباً لأعلى في هذه الفترة

٢– إذا كانت د// (س) > ٠ فى] أ ، ب [
فإن المنحنى يكون محدباً لأسفل في هذه الفترة



خطوات بحث تحدب منحنى الدالة د (س) " قابلة للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :

(١) نوجد د$''$ (س)

(٢) نوجد مجموعة حل د$''$ (س) ⩾ ٠ فنحصل على مناطق التحدب إلى أعلى

، نوجد مجموعة حل د$''$ (س) ⩽ ٠ فنحصل على مناطق التحدب إلى أسفل

نقط الإنقلاب :

هي النقط التي تفصل بين مناطق التحدب إلى أسفل و مناطق التحدب لأعلى من منحنى

* خطوات تعيين نقط الإنقلاب للدالة د (س) " قابلة للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :

- نوجد د$'$ (س) ، د$''$ (س) ثم نحل المعادلة د$''$ (س) = ٠
- نبحث إشارة د$''$ (س) قبل و بعد " مباشرة " كل نقطة من النقط السابقة بحيث تنتمى هذه النقط لمجال الدالة فيكون :

(١) د$''$ (س) تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فتكون هذه النقطة نقطة إنقلاب

(٢) د$''$ (س) لا تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فلا تكون هذه النقطة نقطة إنقلاب

مثال [٦] عين فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب إلى أسفل و نقط الإنقلاب إن وجدت لمنحنى الدالة د (س) = س^{٣} – ٩ س^{٢} + ٢٤ س – ٧

الحل

د$'$ (س) = ٣ س^{٢} – ١٨ س + ٢٤ ، د$''$ (س) = ٦ س – ١٨ = ٦ (س – ٣)

، د$''$ (س) = ٠ عندما : س = ٣

، د$''$ (س) < ٠ عندما : س < ٣

، د$''$ (س) > ٠ عندما : س > ٣

د$''$ (س) – + ٣ د (س)

∴ منحنى د (س) محدب إلى أعلى فى] – ∞ ، ٣ [، و محدب إلى أسفل فى] ٣ ، ∞ [

، (٣ ، ١١) نقطة إنقلاب

تدريب [٦] عين فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب إلى أسفل و نقط الإنقلاب إن وجدت لمنحنى الدالة د (س) = – س^{٣} + ٦ س^{٢} – ١٢ س + ٩

رسم المنحنيات :

لرسم منحنى الدالة د (س) " كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل " نتبع الخطوات الآتية :

١ – نوجد د$'$ (س) ، د$''$ (س)

٢ – نستخدم د$'$ (س) فى تعيين :

أ – مناطق التزايد حيث د$'$ (س) > ٠ ، مناطق التناقص حيث د$'$ (س) < ٠

ب – نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية " إن وجدت " حيث د$'$ (س) = ٠

٣ – نستخدم د$''$ (س) فى تعيين :

أ – مناطق التحدب إلى أعلى حيث د$''$ (س) < ٠

، مناطق التحدب إلى أسفل حيث د$''$ (س) > ٠

ب – نقط الإنقلاب " إن وجدت " حيث د$''$ (س) = ٠

٤ – نعين بعض النقط المساعدة على الرسم مثل :

أ – نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بحل المعادلة د (س) = ٠ " إن أمكن "

و نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع س = ٠ أى (٠ ، د (٠))

ب – بعض النقط الأخرى بالتعويض عن س بأى قيمة و إيجاد د (س)

٥ – ترتيب النقط السابقة فى جدول و تمثيلها بيانياً و توصيلها

مثال [٧] أرسم شكلاً عاماً لمنحنى الدال : د (س) = س (س – ٣)^{٢}

الحل

د (س) = س (س – ٣)^{٢} = س^{٣} – ٦ س^{٢} + ٩ س

د$'$ (س) = ٣ س^{٢} – ١٢ س + ٩ = ٣ (س – ١) (س – ٣)

د$''$ (س) = ٦ س – ١٢ = ٦ (س – ٢)

* التزايد و التناقص و نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

د$'$ (س) = ٠ عندما س = ١ ، س = ٣

د$'$ (س) < ٠ عندما ١ < س < ٣

∴ د تناقصية فى] ١ ، ٣ [

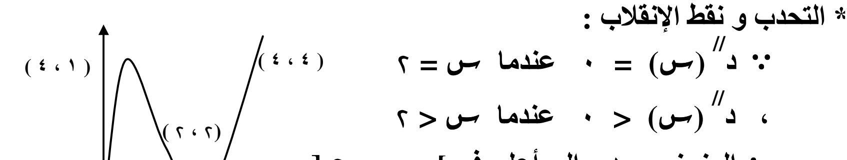
د$'$ (س) > ٠ عندما س < ١ ، س > ٣

∴ د تزايدية فى كل من] ٣ ، ∞ [،] – ∞ ، ١ [

، ∵ د$''$ (١) = – ٦ < ٠ ∴ (١ ، ٤) ع.م

، ∵ د″(٣) = ٦ > ٠ ∴ (٣ ، ٠) ص م

* التحدب و نقط الإنقلاب :



∵ د″(س) = ٠ عندما س = ٢

، د″(س) > ٠ عندما س > ٢

∴ المنحنى محدب إلى أعلى فى] – ∞ ، ٢ [

، د″(س) < ٠ عندما س < ٢

∴ المنحنى محدب إلى أسفل فى] ٢ ، ∞ [

، ∵ المنحنى يتغير تحدبه قبل و بعد س = ٢

∴ (٢ ، ٢) نقطة إنقلاب

* نقط أخرى :

د (س) = ٠ عندما س (س – ٣)٢ = ٠

أى عندما : س = ٠ ، س = ٣

∴ (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٠) نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

، ∵ د (–١) = – ١٦ ، د (٤) = ٤

∴ (– ١ ، – ١٦) ، (٤ ، ٤) تقع على المنحنى

س	٤	٣	٢	١	٠	– ١
ص	٤	٠	٢	٤	٠	– ١٦

تدريب [٧] أرسم شكلاً عاماً لمنحنى الدال : د (س) = (س – ٢) (س + ١)٢

تمارين (٦)

(١) عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = س٢ – ٤ س + ٥

(٢) عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = ∛(س – ١)٢

(٣) عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = √(٩ – س٢)

(٤) عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = س + ١/س

(٥) عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = { س٢ – ٤ س ، س ≤ ٢ ؛ ٢ س – ٨ ، س > ٢ }

(٦) عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = س | س – ٣ |

(٧) عين فترات التزايد و فترات التزايد المطرد و فترات التناقص و التناقص المطرد للدالة :

د (س) = { س٢ + ٢ ، س < ٠ ؛ ٣ ، ٠ ≤ س < ٣ ؛ ٢ س – ٤ ، س > ٣ }

(٨) عين النقط الحرجة ثم اختبر كل منها من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية للدالة :
د (س) = س | س – ٥ |

(٩) عين النقط الحرجة ثم اختبر كل منها من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية للدالة :
د (س) = ∛(س٢ – ٤ س)

(١٠) أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة : د (س) = س٤ – ٤

(١١) أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة :

$د (س) = س^{٤} - ٤ س^{٣} + ٤ س^{٢} - ١٥$

(١٢) أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة :

$د (س) = \frac{٣ س^{٢} + ٥ س + ٢٥}{س + ٢}$

(١٣) أوجد القيمة العظمى و الصغرى المطلقة للدالة

$د (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٢٤ س + ٥٠$ فى [− ٣ ، ٥]

(١٤) أوجد القيمة العظمى و الصغرى المطلقة للدالة $د (س) = \begin{cases} س^{٢} - ٤ س + ٣ & ، س \le ٤ \\ ١٥ - ٣ س & ، س > ٤ \end{cases}$

فى [٠ ، ٥]

(١٥) عين فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب إلى أسفل و نقط الإنقلاب إن وجدت لمنحنى الدالة $د (س) = س^{٤} - ٣ س^{٣} + ١٢ س^{٢} - ٨ س$

(١٦) أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية و نقط الإنقلاب لمنحنى الدالة :

$د (س) = ٢ س^{٣} - ٩ س^{٢} + ١٢ س - ١٠$

(١٧) أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية و نقط الإنقلاب لمنحنى الدالة :

(١٨) أوجد معادلة المماس الإنقلابى للمنحنى : $ص = س^{٣} - ٦ س^{٢} + س - ٢$

(١٩) أوجد قيم ك ، ل إذا علم أن منحنى الدالة : $د (س) = س^{٢} + ك س + ل$ له نقطة حرجة عند س = ٢ ، د (٢) = ١ ثم عين نوع هذه النقطة من حيث كونها عظمى أم صغرى

(٢٠) أوجد قيم ك ، ل إذا علم أن (١ ، − ٣) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة :

$د (س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ل س$ يكون له

(٢١) أوجد قيم ك ، ل ، م ، ن إذا علم أن منحنى الدالة :

$د (س) = ك س^{٣} + ل س^{٢} + م س + ن$ يمر بالنقطة (١ ، ٥) ، النقطة (٢ ، ١) نقطة إنقلاب له ، المماس عندها معادلته هى : $٣ س + ص - ٧ = ٠$

(٢٢) أوجد قيم ك ، ل ، م ، ن إذا علم أن منحنى الدالة :

$د (س) = ك س^{٣} + ل س^{٢} + م س + ن$ يمر بالنقطة (٠ ، ٤) ، النقطة (− ١ ، ٢) نقطة إنقلاب له ، المماس عندها أفقى

(٢٣) إرسم الشكل العام لمنحنى الدالة : $د (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٤$

(٢٤) إرسم الشكل العام لمنحنى الدالة : $د (س) = ٢ - س (س - ٣)^{٢}$

(٢٥) إذا كانت تكاليف استهلاك الوقود لقاطرة تتناسب مع مربع سرعتها وكانت هذه التكاليف ٢٥ جنيهاً فى الساعة عندما تكون السرعة ٢٥ كم / س كما أن هناك تكلفة إضافية تقدر بمائة جنيه فى الساعة بصرف النظر عن سرعتها . أوجد سرعة القاطرة لتكون تكلفة الكيلو متر الواحد اقل ما يمكن

(٢٦) إذا علم أن قوة إحتمال قطعة خشب مقطعها مستطيل يتناسب طرديا مع حاصل ضرب أحد بعدى المستطيل فى مربع بعده الأخر أوجد بعدى المقطع لقطعة خشبية ذات اكبر قوة إحتمال يمكن استخلاصها من جذع شجرة على شكل إسطوانة دائرية قائمة قطرها ١٠٠ سم

(٢٧) تتحرك نقطة على محيط دائرة طول قطرها ١٠ سم أوجد بعدى النقطة عن طرفى قطر الدائرة بحيث يكون مجموع بعديهما أكبر ما يمكن

(٢٨) أوجد أكبر مساحة لسطح مثلث متساوى الساقين محيطه ١٨ سم

(٢٩) قطعة أرض مستطيلة مساحتها ٢٨٨٨ متراً مربعاً يراد إحاطتها بسور و تقسيمها إلى ثلاثة أجزاء بعمل سورين متوازيين لأحد أضلاعها أوجد بعدى المستطيل بحيث يكون الطول الكلى للأسوار أقل ما يمكن أى أن بعدى المستطيل هما ٧٦ متر ، ٣٨ متر

(٣٠) نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق قطرها على أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط النافذة = (٨ + ٢ ط) متراً و كانت النافذة تسمح بمرور أكبر كمية من الضوء أثبت أن طول قطر الدائرة = ٤ متر ، و أوجد البعد الآخر للمستطيل عندئذ

(٣١) مثلث متساوى الساقين رأسه نقطة الأصل و قاعدته قطعة مستقيمة توازى محور السينات و تقع فوقه و يقع طرفاها على المنحنى ١٢ ص = ٣٦ – س^{٢} عين أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث

(٣٢) سلك طوله ل سم قطع إلى جزئين و ثنى احدهما على شكل مربع و ثنى الآخر على شكل مثلث متساوى الأضلاع أوجد النسبة بين طولى الجزئين حتى يكون مجموع مساحتى المربع و المثلث أصغر ما يمكن

(٣٣) إذا كان ف هو بعد النقطة (١ ، ٠) عن النقطة (س ، ص) الواقعة على المنحنى ص = $\sqrt{\text{س}}$ أوجد الإحداثيات (س ، ص) لهذه النقطة التى تكون عندها ف أصغر ما يمكن

(٣٤) قضيب رفيع طوله ١ متراً مثبت من أحد طرفيه و ترك ليتذبذب كالبندول فإذا كانت مقاومة القضيب للكسر عند نقطة تبعد س من نقطة التعليق تساوى ٩ س (١ – س)^{٢} حيث ٩ مقدار سالب أوجد النقطة التى تكون عندها المقاومة أقل ما يمكن

(٣٥) جسم مكون من إسطوانة تعلوه نصف كرة تشتركان فى القاعدة العليا للإسطوانة فإذا كانت المساحة الكلية الخارجية للجسم = ٢٠٠٠ ط سم^{٢} و كان حجم الجسم قيمة عظمى أوجد إرتفاع الإسطوانة و طول نصف قطر قاعدتها

(٣٦) قطعة ارض على شكل شبه منحرف ٩ ب حـ ء فيه ٩ب // حـ ء ، ب حـ ⊥ ٩ ب و كان ٩ ب : ب حـ : حـ ء = ٣ : ٤ : ١ ، يراد بناء عمارة على قطعة مستطيلة الشكل فأخذت نقطة و على ٩ و و أسقط منها و هـ ⊥ ٩ ب ، و ن ⊥ ب حـ أثبت أن أكبر مساحة لسطح المستطيل = $\frac{٩}{١٦}$ من مساحة سطح قطعة الأرض

(٣٧) ثمن البيع لسلعة ما هو ١٠٠ – ٠,٠٢ س جنيهاً لكل وحدة من هذه السلعة حيث س هو العدد المنتج من هذه السلعة فإذا كانت تكلفة إنتاج س وحدة منها = ٤٠ س + ١٥٠٠٠ جنيهاً أوجد عدد السلع الواجب إنتاجها لجعل الربح أكبر ما يمكن

التكامل

مقدمة :

درسنا سابقاً كيفية الحصول على الدالة المشتقة د/ من الدالة الأصلية د
و لكن فى كثير من المواقف العملية يحدث العكس ، أى يكون المطلوب الحصول على الدالة د
إذا علمت الدالة المشتقة د/ (عملية عكسية)
و هذا يستدعى البحث عن دالة إذا فاضلناها حصلنا على المشتقة المعلومة
تسمى هذه العملية بإيجاد دالة مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة و هذا ما يعرف بعلم التكامل

تعريف :

* إذا كانت د (س) دالة متصلة و أمكن إيجاد دالة ت (س) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة فى مجالها بحيث : ت/ (س) = د (س) فإن : ت (س) تسمى دالة المشتقة العكسية للدالة د أو دالة أصلية مقابلة للدالة د

مثال توضيحى [١] أوجد دالة أصلية مقابلة للدالة د (س) = ٢ س

الحل

نعلم أن : س^{٢} دالة مشتقتها ٢ س
أى أن : ت (س) = س^{٢} دالة أصلية مقابلة أو مشتقة عكسية للدالة المعطاه د (س) = ٢ س
و نلاحظ أن : هناك مجموعة غير منتهية من الدوال الأصلية المقابلة للدالة د (س) = ٢ س منها : س^{٢} + ٣ ، س^{٢} − ١ ، ....
و ذلك لأن مشتقة كل منها هى (س) = ٢ س
و هذا معناه أن : المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة د (س) = ٢ س ليست وحيدة و على ذلك و بصورة عامة فإن :
د (س) = ٢ س + ث حيث : ث ثابت إختيارى يسمى ثابت التكامل
و لذلك فإن : هذه الصورة تسمى المشتقة العكسية أو التكامل غير المحدد
و يرمز للدالة ت (س) بالرمز $\int$ د (س) ء س
و يقرأ تكامل د (س) بالنسبة إلى س
أى أن : ت (س) = $\int$ د (س) ء س إذا و فقط إذا كان : ت/ (س) = د (س)

مثال توضيحى [٢] أوجد المشتقة العكسية لكل من الدوال التالية :

٣ س^{٢} ، ٥ س^{٤} ، ١٨ س^{٥}

الحل

ت$_{١}$ (س) = $\int$ (٣ س^{٢}) ء س = س^{٣} + ث
ت$_{٢}$ (س) = $\int$ (٥ س^{٤}) ء س = س^{٥} + ث
ت$_{٣}$ (س) = $\int$ (١٨ س^{٥}) ء س = ٣ س^{٦} + ث
و نلاحظ أن :
$\int$ (١٨ س^{٥}) ء س = ١٨ $\int$ (س^{٥}) ء س = ١٨ × $\frac{١}{٦}$ س^{٦} + ث
= ٣ س^{٦} + ث و هو نفس الجواب السابق
و عموماً إذا كان : أ ثابت فإن :
$\int$ أ د (س) ء س = أ $\int$ د (س) ء س

* مما سبق يتضح أن : عملية إيجاد المشتقة العكسية للدوال بإستخدام التعريف المباشر للتكامل ليست عملية سهلة بالإضافة إلى أنها تتطلب كثيراً من الجهد و الوقت لذا سيتم عرض صيغ قياسية يمكن إستخدامها لإيجاد المشتقات العكسية للدوال و تركيبات منها

نظرية (١) :

$\int$ س^{ن} ء س = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + ث حيث : ن ≠ −١ ، ث ثابت

البرهان ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر

خصائص التكامل :

(١) $\int$ أ س^{ن} ء س = $\frac{\text{أ س}^{ن+١}}{ن+١}$ + ث حيث : ن ≠ −١ ، أ ، ث ثوابت
(٢) $\int$ [د$_{١}$(س) ± د$_{٢}$(س)] ء س = $\int$ د$_{١}$(س) ء س ± $\int$ د$_{٢}$(س) ء س

* **ملاحظات و نتائج :**

* $\int$ ء س = س + ث   * $\int$ أ ء س = أ س + ث

* يكفى إضافة ثابت واحد لمجموع المشتقات العكسية
* يتم إجراء عمليات الضرب و القسمة للدوال قبل إجراء التكامل
لأنه لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمتهما

مثال [١] أوجد ما يلى :

(١) $\int (٣س^{٢} + ٤س - ٥)\ ءس$ (٢) $\int (س^{٢} - ٣)^{٢}\ ءس$

(٣) $\int (\frac{١}{س^{٢}} - \sqrt{س})\ ءس$ (٤) $\int \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}\ ءس$

الحل

(١) $\int (٣س^{٢} + ٤س - ٥)\ ءس = ٣ \times \frac{١}{٣} س^{٣} + ٤ \times \frac{١}{٢} س^{٢} - ٥س + ث$

$= س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س + ث$

(٢) $\int (س^{٢} - ٣)^{٢}\ ءس = \int (س^{٤} - ٦س^{٢} + ٩)\ ءس$

$= \frac{١}{٥} س^{٥} - ٢س^{٣} + ٩س + ث$

(٣) $\int (\frac{١}{س^{٢}} - \sqrt{س})\ ءس = \int (س^{-٢} - س^{\frac{١}{٢}})\ ءس$

$= - س^{-١} - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٤) $\int \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}\ ءس = \int \frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}{س - ١}\ ءس$

$= \int (س^{٢} + س + ١)\ ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} + س + ث$

تدريب [١] أوجد ما يلى :

(١) $\int (٨س^{٣} - ٩س^{٢} + ٧)\ ءس$ (٢) $\int (س + ١)^{٣}\ ءس$

(٣) $\int (\frac{١}{س^{٣}} - \sqrt[٣]{س^{٢}})\ ءس$ (٤) $\int \frac{س^{٣} + ٨}{س + ٢}\ ءس$

نظرية (٢) :

* $\int (أس + ب)^{ن}\ ءس = \frac{(أس + ب)^{ن + ١}}{أ(ن + ١)} + ث$

حيث : $ن \neq -١$ ، أ ، ب ، ث ثوابت

البرهان ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر

مثال [٢] أوجد ما يلى :

(١) $\int (٢س - ٣)^{٤}\ ءس$ (٢) $\int (٤ - ٣س)^{٦}\ ءس$

(٣) $\int \sqrt{٢س - ٥}\ ءس$ (٤) $\int س^{٥} (١ + \frac{١}{س})^{٥}\ ءس$

الحل

(١) $\int (٢س - ٣)^{٤}\ ءس = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥} \times (٢س - ٣)^{٥} + ث$

$= \frac{١}{١٠} (٢س - ٣)^{٥} + ث$

(٢) $\int (٤ - ٣س)^{٦}\ ءس = - \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٧} \times (٤ - ٣س)^{٧} + ث$

$= - \frac{١}{٢١} (٤ - ٣س)^{٧} + ث$

(٣) $\int \sqrt{٢س - ٥}\ ءس = \int (٢س - ٥)^{\frac{١}{٢}}\ ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} (٢س - ٥)^{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{١}{٣} (٢س - ٥)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٤) $\int س^{٥} (١ + \frac{١}{س})^{٥}\ ءس = \int [س(١ + \frac{١}{س})]^{٥}\ ءس$

$= \int (س + ١)^{٥}\ ءس = \frac{١}{٦} (س + ١)^{٦} + ث$

مثال [٢] أوجد ما يلى :

(١) $\int (٣س + ١)^{٩}\ ءس$ (٢) $\int (٦ - ٤س)^{٧}\ ءس$

(٣) $\int \sqrt[٣]{٤س + ٣}\ ءس$ (٤) $\int س^{٨} (٤ - \frac{٣}{س})^{٨}\ ءس$

مثال [٣] أوجد ما يلى :

(١) $\int س\,(س+١)^{٥}\,ءس$ (٢) $\int (س-١)\sqrt{س-١}\,ءس$

(٣) $\int \frac{س}{\sqrt{٤س-٣}}\,ءس$

الحل

(١) $\int س\,(س+١)^{٥}\,ءس = \int [\,(س+١)-١\,](س+١)^{٥}\,ءس$

$= \int (س+١)^{٦}\,ءس - \int (س+١)^{٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٧}(س+١)^{٧} - \frac{١}{٦}(س+١)^{٦} + ث$

(٢) $\int (س-١)\sqrt{س-١}\,ءس = \int (س-١)(س-١)^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \int (س-١)^{\frac{٣}{٢}}\,ءس = \frac{٢}{٥}(س-١)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

(٣) $\int \frac{س}{\sqrt{٤س-٣}}\,ءس = \int س\,(٤س-٣)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \frac{١}{٤}\int [\,(٤س-٣)+٣\,](٤س-٣)^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \frac{١}{٤}\int (٤س-٣)^{\frac{١}{٢}}\,ءس + \frac{٣}{٤}\int (٤س-٣)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \frac{١}{٤}\times\frac{١}{٤}\times\frac{٢}{٣}(٤س-٣)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٣}{٤}\times\frac{١}{٤}\times\frac{١}{٢}(٤س-٣)^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{١٢}(٤س-٣)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٣}{٣٢}(٤س-٣)^{\frac{١}{٢}} + ث$

تدريب [٣] أوجد ما يلى :

(١) $\int س\,(س-٦)^{٤}\,ءس$ (٢) $\int (س+٤)\sqrt{س+٤}\,ءس$

(٣) $\int \frac{س}{\sqrt{٣س-١}}\,ءس$

ملاحظة هامة " فصل المتغيرات " :

* إذا كان : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د(س)}{ر(ص)}$ فإن : $\int ر(ص)\,ءص = \int د(س)\,ءس$
* إذا كان : $\frac{ءص}{ءس} = ك(س)$ فإن : $ص = \int ك(س)\,ءس$

مثال [٤] إذا كان : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٦س+٥}{٣-٢ص}$ ، ص = ٣ عندما س = −١

أوجد العلاقة بين س ، ص

الحل

$\int (٣-٢ص)\,ءص = \int (٦س+٥)\,ءس$

$\therefore ٣ص - ص^{٢} = ٣س^{٢} + ٥س + ث$ ، $\because$ ص = ٣ عندما س = −١

$\therefore ٩ - ٩ = ٣ - ٥ + ث$ $\therefore ث = ٢$

$\therefore ٣ص - ص^{٢} = ٣س^{٢} + ٥س + ٢$

تدريب [٤] إذا كان : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س+٥}{٣-٤ص}$ ، ص = ٢ عندما س = −١

أوجد العلاقة بين س ، ص

تكاملات بعض الدوال المثلثية :

(١) ∫ حا س ء س = – حتا س + ث

(٢) ∫ حتا س ء س = حا س + ث

(٣) ∫ قا٢ س ء س = ظا س + ث

(٤) ∫ حا (أ س + ب) ء س = – $\frac{١}{أ}$ حتا (أ س + ب) + ث

(٥) ∫ حتا (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ حتا (أ س + ب) + ث

(٦) ∫ قا٢ (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث

البرهان ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر ، ث ثابت إختيارى

تذكر ما يلى :

* حتا٢ س + حا٢ س = ١
* ١ + ظا٢ س = قا٢ س
* حا ٢ س = ٢ حا س حتا س
* حتا ٢ س = حتا٢ س – حا٢ س = ٢ حتا٢ س – ١ = ١ – ٢ حا٢ س
* ظا ٢ س = $\frac{٢ \text{ ظا س}}{\text{ظا}^٢ \text{ س}}$

مثال [٥] أوجد ما يلى :

(١) ∫ (٣ حا س + ٥ قا٢ س) ء س

(٢) ∫ حا س حتا س ء س

(٣) ∫ [حتا٢ س + حا س] ء س

(٤) ∫ [قا٢ ($\frac{١}{٢}$ س + ٣) + حتا (٣ س – ١)] ء س

الحل

(١) ∫ (٣ حا س + ٥ قا٢ س) ء س = – ٣ حتا س +٥ ظا س + ث

(٢) ∫ حا س حتا س ء س = $\frac{١}{٢}$ ∫ ٢ حا س حتا س ء س = $\frac{١}{٢}$ ∫ حا ٢ س ء س

= – $\frac{١}{٤}$ حتا ٢ س + ث

(٣) ∵ حتا ٢ س = ٢ حتا٢ س – ١

∴ ٢ حتا٢ س = حتا ٢ س + ١

∴ حتا٢ س = $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$

∫ [حتا٢ س + حا س] ء س = ∫ [$\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ + حا س] ء س

= $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ س – حتا س + ث

(٤) ∫ [قا٢ ($\frac{١}{٢}$ س + ٣) + حتا (٣ س – ١)] ء س

= ٢ قا ($\frac{١}{٢}$ س + ٣) + $\frac{١}{٣}$ حتا (٣ س – ١) + ث

تدريب [٥] أوجد ما يلى :

(١) ∫ (٤ حا ٤ س – ٦ حتا ٣ س) ء س

(٢) ∫ (١ + حتا س)٢ ء س

(٣) ∫ (١ + قا س) (١ – قا س) ء س

(٤) ∫ [حا ($\frac{١}{٣}$ س + ١) + حتا ($\frac{١}{٢}$ س + ١)] ء س

بعض تطبيقات التكامل :

التطبيق الهندسى :

نعلم أن :

إذا كان : ص = د (س) هى معادلة منحنى فإن : ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) تقع عليه هو ص/ = د/ (س) و بالتالى تكون معادلته هى :

د (س) = ∫ د/ (س) ء س

ملاحظة :
من هذا التكامل نحصل على معادلة عائلة من المنحنيات التى لها نفس ميل المماس عند أى نقطة معينة للإحداثى السينى س و تحديد أحد هذه المنحنيات يتطلب إعطاء شرط إضافى كأن يمر المنحنى بنقطة معينة أو يقطع جزءً معيناً من أحد المحورين أو ٠٠٠٠ الخ

مثال [٦] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى (س^{٢} – ٢ س – ٣) و كان المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، – ٨)
أوجد معادلة المنحنى

الحل

∵ د/ (س) = (س^{٢} – ٢ س – ٣)

∴ د (س) = ∫ (س^{٢} – ٢ س – ٣) ء س = $\frac{1}{3}$ س^{٣} – س^{٢} – ٣ س + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، – ٨)   ∴ ث = ١

∴ معادلة المنحنى هى : د (س) = $\frac{1}{3}$ س^{٣} – س^{٢} – ٣ س + ١

تدريب [٦] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى (٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} – ٢) و كان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، – ٢)
أوجد معادلة المنحنى

مثال [٧] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى (٣ – ٢ حا ٢ س) و كان المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٥)
أوجد معادلة المنحنى

الحل

∵ د/ (س) = (٣ – ٢ حا ٢ س)

∴ د (س) = ∫ (٣ – ٢ حا ٢ س) ء س = ٣ س + حتا ٢ س + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٥)   ∴ ث = ٤

∴ معادلة المنحنى هى : د (س) = ٣ س + حتا ٢ س + ٤

تدريب [٧] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى (حا س – حتا س)^{٢} و كان المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، $\frac{1}{2}$)
أوجد معادلة المنحنى

مثال [٨] إذا كان معدل التغير فى الحجم ع سم^{٣} لجسم من المعدن بالنسبة للزمن بالدقيقة تحت تأثير الحرارة يتعين بالعلاقة ع/ = ٠,٠٤٨ ن^{٣} + ٠,٠٦ ن^{٢} + ٠,٠٨ ن أوجد حجم الجسم عند بدء التسخين إذا علم أن حجم الجسم = ١٠١ سم^{٣} عند الدقيقة الخامسة

الحل

ع = ∫ (٠,٠٤٨ ن^{٣} + ٠,٠٦ ن^{٣} + ٠,٠٤ ن^{٢}) ء ن

= ٠,٠١٢ ن^{٤} + ٠,٠٢ ن^{٢} + ٠,٠٨ ن + ث ، ∵ ع = ١٠١ عند ن = ٥

∴ ١٠١ = ٧,٥ + ٢,٥ + ١ + ث   و منها : ث = ٩٠

∴ ع = ٠,٠٤٨ ن^{٣} + ٠,٠٦ ن^{٣} + ٠,٠٤ ن^{٢} + ٩٠

عند بدئ التسخين : ن = ٠   و ينتج : ع = ٩٠ سم^{٣}

تدريب [٨] إذا معدل التغير فى المساحة م سم^{٢} لصفيحة من المعدن بالنسبة للزمن بالدقيقة تحت تأثير الحرارة يتعين بالعلاقة م/ = ٠,٠١٥ ن^{٢} + ٠,٠٢ ن أوجد مساحة الصفيحة عند بدء التسخين إذا علم أن مساحة الصفيحة = ٩٠ سم^{٢} عند الدقيقة العاشرة

تمارين (٧)

(١) أحسب : ∫ (٣ س – ٥) (س + ١) ء س

(٢) أحسب : ∫ $\frac{(٢ س – ١)(٣ – ٢ س)}{س^{٤}}$ ء س

(٣) أحسب : ∫ س^{١٠} ($\frac{٧}{س}$ – $\frac{١}{س^{٢}}$)^{٥} ء س

(٤) أحسب : ∫ $\frac{(٩ – ٣٠ س + ٢٥ س^{٢})^{\frac{١}{٣}}}{\sqrt{٣ – ٥ س}}$ ء س

(٥) أحسب : ∫ (س – $\frac{١}{س}$) (س + $\frac{١}{س}$) (س^{٢} – $\frac{١}{س^{٢}}$) ء س

(٦) أحسب : ∫ (س + ١) $\sqrt{٣ س + ٥}$ ء س

(٧) أحسب : ∫ [قا^{٢} ($\frac{١}{٢}$ س + ٥) + حتا (٢ س + ١)]ء س

(٨) أحسب : ∫ قا س (٣ حتا س – ٢ قا س) ء س

(٩) أحسب : ∫ ٦ حا س حتا س ء س

(١٠) أحسب : ∫ $\frac{حتا^{٢} س}{١ + حا س}$ ء س

(١١) ∫ (حتا^{٢} س + طا^{٢} س) ء س

(١٢) إذا كانت المشتقة الأولى للدالة د تساوى س^{١٧} ($\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{س^{٢}}$)^{٨}
أوجد : د (٠) – د (– ١)

(١٣) أوجد الدالة التى يكون معدل تغيرها بالنسبة إلى س عند أى لحظة هو :
٣ س^{٢} + ٤ س – ٤ و قيمتها = ٨ عند س = – ٢

(١٤) إذا كان : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ – ٣ س^{٢} ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٥ – ٤ ص و كانت ص = ٠ ، ع = ١٢
عندما س = ١ أثبت أن : ع = س^{٤} – ٨ س^{٢} + ١٧ س + ٢

(١٥) إذا كان : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٥ – ٦ س}{٢ ص}$ ، ص = ٢ عندما س = ١
أوجد العلاقة بين س ، ص

(١٦) إذا كانت د (س) معرفة على ح و تحقق العلاقة د (١) = ١ ، د (٢) = ١٠ ،
د (ى + هـ) – د (ى) = ك هـ ى – ٢ هـ^{٢} حيث : ك ، هـ ، ى ثوابت أوجد د (س)

(١٧) إذا كان : ميل المماس لمنحنى دالة عند أى نقطة عليه (س ، ص)
هو س^{٢} – ٤ س + ٣ و كان لمنحنى الدالة قيمة صغرى محلية تساوى – ٨
أوجد القيمة العظمى المحلية إن وجدت

(١٨) إذا كان : ميل العمودى لمنحنى دالة عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو $\frac{ص + ٤}{٣ – س}$
و كان المنحنى يمر بنقطة الأصل أوجد معادلة المنحنى

(١٩) منحنى يمر بنقطة الأصل و ميل المماس عند أى نقطة عليه هو (١ – حتا ٢ س)
أوجد معادلته

(٢٠) إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه هو (٦ س – ٢)
و كان المماس عند النقطة (٣ ، ١) الواقعة عليه موازياً للمستقيم
ص – ٢ س + ٥ = ٠ أوجد معادلة المنحنى

(٢١) ميل منحنى ما عند أى نقطة عليه يتناسب طردياً مع مربع الإحداثى السينى فإذا كان ميل
المنحنى عند النقطة (١ ، – ١) هو ١٢ أوجد معادلة المنحنى

(٢٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه هو م = ٣ س^{٢} – ك س حيث
ك ثابت أوجد معادلة المنحنى علماً بان النقطة (١ ، ٢) نقطة إنقلاب له

(٢٣) أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان ص$''$ = ك س + ل و للمنحنى نقطة
إنقلاب عند (٠ ، ٢) و قيمة عظمى محلية عند (– ١ ، ٤)

(٢٤) وعاء سعته ١٤٠٠ سم^{٣} كان فارغاً ثم صب فيه الماء تدريجياً بمعدل
(٢ ن + ٥٠) سم^{٣} / ث حيث ن الزمن أوجد الزمن اللازم لإمتلاء الوعاء

(٢٥)إذا كان لدالة ما $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\frac{١}{٢} س^{٢} + س + ١}{\frac{١}{٢} ص^{٢} + ص + ١}$ أثبت أن :

$\frac{س – ص}{|١}$ + $\frac{س^{٢} – ص^{٢}}{|٢}$ + $\frac{س^{٣} – ص^{٣}}{|٣}$ = مقدار ثابت

تمارين (١)

(١) ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = ٠ مباشرة

∴ نهـا (س ← ٠) د (س) = نهـا (س ← ٠) (٣س + ١) = ٣ × ٠ + ١ = ١

، ∵ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١

∴ يجب بحث كلاً من النهاية اليمنى و النهاية اليسرى عند س = ١

∵ د (١^{-}) = نهـا (س ← ١^{-}) (٣س + ١) = ٣ × ١ + ١ = ٤

، د (١^{+}) = نهـا (س ← ١^{+}) (٥ − س) = ٥ − ١ = ٤

∴ د (١^{-}) = د (١^{+}) = ٤ ∴ نهـا (س ← ١) د (س) = ٤

، ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = ٣ مباشرة

∴ نهـا (س ← ٣) د (س) = نهـا (س ← ٣) (٥ − س) = ٥ − ٣ = ٢

(٢) ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين س = ١ مباشرة

∴ نهـا (س ← ١) د (س) = نهـا (س ← ١) $\frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$ = $\frac{١}{٢}$

، ∵ قاعدة الدالة على يسار ٤ تختلف عن قاعدتها على يمين ٤

∴ يجب بحث كلاً من النهاية اليمنى و النهاية اليسرى عند س = ٤

∵ د (٤^{-}) = نهـا (س ← ٤^{-}) $\frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$ = $\frac{١}{٣}$

، د (٤^{+}) = نهـا (س ← ٤^{+}) $\frac{١}{٢\text{س} - ٥}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ د (٤^{-}) = د (٤^{+}) = $\frac{١}{٣}$ ∴ نهـا (س ← ٤) د (س) = $\frac{١}{٣}$

، ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يسار س = ٦ مباشرة

∴ نهـا (س ← ٣) د (س) = نهـا (س ← ٣) $\frac{١}{٢\text{س} - ٥}$ = $\frac{١}{٧}$

(٣) مثل (١) ، (٢) و يكون :

نهـا (س ← $-\frac{\pi}{٢}$) د (س) = نهـا (س ← $-\frac{\pi}{٢}$) $\frac{٢\text{س}}{\text{حاس}}$ = π

، د (٠^{-}) = د (٠^{+}) = ٢ ∴ نهـا (س ← ٠) د (س) = ٢

، نهـا (س ← $\frac{\pi}{٢}$) د (س) = نهـا (س ← $\frac{\pi}{٢}$) (٢ حتا $\frac{٤}{٣}$ س) = −١

(٤) ∵ د (١^{+}) = نهـا (س ← ١^{+}) (٣ $\text{س}^{٢}$ + ٨) = ١١

، د (١^{-}) = نهـا (س ← ١^{-}) (٢ س + ٩) = ١١

، ∵ د (١^{+}) = د (١^{-}) = ١١ ∴ نهـا (س ← ١) د (س) = ١١

(٥) ∵ د (٣^{+}) = نهـا (س ← ٣^{+}) (٥ $\text{س}^{٤}$ − ٤ س + ١٢) = ٤٠٥

، د (٣^{-}) = نهـا (س ← ٣^{-}) $\frac{\text{س}^{٥} - ٢٤٣}{\text{س} - ٣}$ = ٥ × $(٣)^{٤}$ = ٤٠٥

، ∵ د (٣^{+}) = د (٣^{-}) = ٤٠٥ ∴ نهـا (س ← ٣) د (س) = ٤٠٥

(٦) ∵ د (٠^{-}) = نهـا (س ← ٠^{-}) د (س) = نهـا (س ← ٠^{-}) $\frac{(\text{س} + ٣)^{٢} - ٩}{\text{س}}$

= نهـا (س ← ٠^{-}) $\frac{\text{س} (\text{س} + ٦)}{\text{س}}$ = ٦

، د (٠^{+}) = نهـا (س ← ٠^{+}) د (س) = نهـا (س ← ٠^{+}) (س + ٦) = ٦

، ∵ د (٠^{+}) = د (٠^{-}) = ٦ ∴ نهـا (س ← ٠) د (س) = ٦

(٧) ∵ $د(٠^-) = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}\,٣\,س}{س} = ٣$

، $د(٠^+) = \underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \text{حتا}\,٣\,س = ١$ ∴ $د(٠^+) \neq د(٠^-)$

∴ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ليس لها وجود

(٨) ∵ $د(٠^+) = \underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}} \dfrac{(س+١)^٤ - ١}{(س+١) - ١} = ٤$

، $د(٠^-) = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\,س - \text{حا}\,س}{س\ \text{حتا}\,س} = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ - \frac{\text{حا}\,س}{س}}{\text{حتا}\,س} = ٤$

، ∵ $د(٠^+) = د(٠^-) = ٤$ ∴ $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}\ د(س) = ٤$

(٩) ∵ $د(٢^+) = \underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}} (س - ٢) \times \underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}(س-٢)^٢}{(س-٢)^٢} = ٠ \times ١ = ٠$

، $د(٢^-) = \underset{س \to ٢^-}{\text{نهـا}} (٤ - ٢\,س) = ٠$

، ∵ $د(٢^+) = د(٢^-) = ٠$ ∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ د(س) = ٠$

(١٠) ∵ د(س) لها نهاية عند س = ١ ∴ $د(١^-) = د(١^+)$

∴ $\underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}} \dfrac{(أ\,س + ٥)(س - ١)}{س - ١} = \underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} (٣\,س + ٥)$

∴ $أ + ٥ = ٨$ و منها : $أ = ٣$

(١١) ∵ د (س) لها نهاية عند س = ٠ ∴ $د(٠^+) = د(٠^-)$

∴ $\underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}} \dfrac{(س+١)^٤ - ١}{(س+١) - ١} = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \dfrac{ك - \frac{\text{حا}\,س}{س}}{\text{حتا}\,س}$

∴ $٤ = ك - ١$ و منها : $ك = ٥$

(١٢) ∵ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ د(س) = ٨$ ∴ $د(١^-) = ٨$

∴ $ك + ٥ = ٨$ و منها : $ك = ٣$

، $د(١^+) = ٨$

، ∵ المقام = ٠ عند س = ١ ∴ البسط = ٠ عند س = ١

∴ $٣ + م - ٥ = ٠$ و منها : $م = ٢$

(١٣) $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٣\,س + ٢ & ، س \geq ٣ \\ -س^٢ + ٣\,س + ٢ & ، س < ٣ \end{cases}$

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} (-س^٢ + ٣\,س + ٢) = ٤$

$د(٣^+) = د(٣^-) = ٢$ ∴ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ د(س) = ٢$

$\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} (س^٢ - ٣\,س + ٢) = ١٢$

تمارين (٢)

(١) أولاً : ∵ د (س) غير معرفة عند س = ١ ∴ د (س) غير متصلة عند س = ١

ثانياً : ∵ د (٣) = ١٠ ، د (٣^+) = $\lim_{س \to ٣^+}$ (٣ س + ١) = ١٠

، د (٣^-) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ($س^٢$ + ٤) = ١٣

، ∵ د (٣^+) ≠ د (٣^-) ∴ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) غير موجودة

∴ د (س) غير متصلة عند س = ٣

(٢) ∵ د (س) = { $س^٢$ ، س > ٠ ؛ ٢ ، س = ٠ ؛ $-س^٢$ ، س < ٠ } ∴ د (٠) = ٢

، د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ ($س^٢$) = ٠ ، د (٠^-) = $\lim_{س \to ٠^-}$ ($-س^٢$) = ٠

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = ٠ ≠ د (٠) ∴ د (س) غير متصلة عند س = ٠

(٣) ∵ د (١) = ١١ ، د (١^+) = $\lim_{س \to ١^+}$ (٣ $س^٢$ + ٨) = ١١

، د (١^-) = $\lim_{س \to ١^-}$ (٢ س + ٩) = ١١

، ∵ د (١^+) = د (١^-) = ١١ ∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ١١

، ∵ د (١) = $\lim_{س \to ١}$ د (س) ∴ د (س) متصلة عند س = ١

(٤) ∵ د (س) متصلة عند س = ١ ∴ د (١) = د (١^+) = د (١^-)

∴ م + ٤ ك = ١١ ، ك + ٣ م = ١١

، و بحل المعادلتين ينتج : ك = ٢ ، م = ٣

(٥) ∵ الدالة متصلة عند س = ٩ ∴ الدالة لها نهاية عند س = ٩

، ∵ المقام = صفر ∴ البسط = صفر عند س = ٩

∴ $\sqrt{٩ - ك} - ١ = ٠$ ∴ ك = ٨

∴ $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س - ٨} - ١}{س - ٩} \times \frac{\sqrt{س - ٨} + ١}{\sqrt{س - ٨} + ١} = \lim_{س \to ٩} \frac{١}{\sqrt{س - ٨} + ١}$

$= \frac{١}{٢}$

∴ د (٩) = $\frac{١}{٢}$ ∴ ٩ − م = $\frac{١}{٢}$ ∴ م = $\frac{١٧}{٢}$

(٦) ∵ د (س) متصلة عند س = ١ ∴ د (١) = $\lim_{س \to ١}$ د (س)

∴ ٢ = $\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١) (س - م)}{س - ١}$ = ١ − م

، منها : م = −١

(٧) ∵ د (س) متصلة عند س = ١ ∴ د (١) = د (١^+) = د (١^-)

∴ $\lim_{س \to ١^+}$ (٢ ك س + ٦) = $\lim_{س \to ١^-} \frac{س^{١٧} - ١}{س - ١} + \lim_{س \to ١^-} \frac{س^{١٣} - ١}{س - ١}$

∴ ٢ ك + ٦ = ١٧ + ١٣ و منها : ك = ١٢

(٨) ∵ د (س) متصلة عند س = ١ ∴ د (١) = د (١^+) = د (١^-)

∴ $\lim_{س \to ١^+}$ (٤ س + ١) = $\lim_{س \to ١^-} \frac{س^ن - ١}{س - ١}$ ∴ و منها ن = ٥

(٩) ∵ د (س) = $س^٢$ + ٤ لكل س ∈ [٠ ، ٢]

، ∵ د (س) كثيرة حدود ∴ د (س) متصلة على [٠ ، ٢] (١)

، ∵ د (س) = ٣ س + ٢ لكل س ∈] ٢ ، ٥]

، ∵ د (س) كثيرة حدود ∴ د (س) متصلة على] ٢ ، ٥] (٢)

، ∵ د (٢) = ٨ ، د (٢^+) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (٣ س + ٢) = ٨

، د (٢^-) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ($س^٢$ + ٤) = ٨

∴ د (٢) = د (٢^{+}) = د (٢^{-})   ∴ د (س) متصلة عند س = ٢   (٣)

، ∵ د (٠) = نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ (س^{٢} + ٤)   ∴ د (س) متصلة من اليمين عند س = ٠   (٤)

، ∵ د (٥) = نهـا$_{س \to ٥^{-}}$ (٣ س + ٢)   ∴ د (س) متصلة من اليسار عند س = ٠   (٥)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٥) ينتج أن : د (س) متصلة على [٠ ، ٥]

(١٠) ∵ د (س) على ح   ∴ د (س) عند كل من س = −١ ، س = ٣

نهـا$_{س \to -١^{+}}$ (٣١ + س) = نهـا$_{س \to -١^{-}}$ (ل س + م)   ∴ −٢ = − ل + م   (١)

، نهـا$_{س \to ٣^{+}}$ (س^{٢} − ٣) = نهـا$_{س \to ٣^{-}}$ (ل س + م)   ∴ ٦ = ٣ ل + م   (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : ل = ٢ ، م = ٠

(١١) ∵ د (س) على ح   ∴ د (س) عند كل من س = −١ ، س = ٢

نهـا$_{س \to -١^{+}}$ (س^{٢} + م) = نهـا$_{س \to -١^{-}}$ (ل س + ٧)   ∴ م + ل = ٦   (١)

، نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ (٣ س + ل) = نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ (س^{٢} + م)   ∴ م − ل = ٢   (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : ل = ٢ ، م = ٤

(١٢) ∵ د (س) على ح   ∴ د (س) عند س = ٠

نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ (س + ل) = نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{طا ٢ س}{لو_{٢} (٨)^{س}}$

∴ ل = نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{طا ٢ س}{لو_{٢} (٨)^{س}}$ = نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{طا ٢ س}{٣ س لو_{٢} ٢}$ = نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{طا ٢ س}{٣ س}$

∴ ل = $\frac{٢}{٣}$

تمارين (٣)

(١) أولاً : ∵ د (١) = ٥ × ١ − ٩ = ٤

، عند س > ١ فإن : د (١ + هـ) − د (١) = ٥ (١ + هـ) − ٩ − ٤ = ٥ هـ

∴ د$'$ (١^{+}) = نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ $\frac{٥ هـ}{هـ}$ = نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ ٥ = ٥

، عند س < ١ فإن : د (١ + هـ) − د (١) = (١ + هـ)^{٢} + ٣ − ٤ = ٢ هـ + هـ^{٢}

∴ د$'$ (١^{-}) = نهـا$_{هـ \to ٠^{-}}$ $\frac{٢ هـ + هـ^{٢}}{هـ}$ = نهـا$_{هـ \to ٠^{-}}$ (٢ + هـ) = ٢

، ∵ د$'$ (١^{+}) ≠ د$'$ (١^{-})   ∴ د (س) غير قابلة للإشتقاق عند س = ١

ثانياً : ∵ د (٣) = ٩ − ٣ = ٦

، عند س > ٣ فإن : د (٣ + هـ) − د (٣) = (٣ + هـ)^{٢} − (٣ + هـ) − ٦

= ٥ هـ + هـ^{٢}

∴ د$'$ (٣^{+}) = نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ $\frac{٥ هـ + هـ^{٢}}{هـ}$ = نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ (٥ + هـ) = ٥

، عند س < ٣ فإن : د (٣ + هـ) − د (٣) = ٥ (١ + هـ) − ٦ = ٥ هـ

∴ د$'$ (٣^{-}) = نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ $\frac{٥ هـ}{هـ}$ = نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ ٥ = ٥

، ∵ د$'$ (٣^{+}) = د$'$ (٣^{-}) = ٥

∴ د (س) غير قابلة للإشتقاق عند س = ٣   ،   د$'$ (٣) = ٥

(٢) ∵ د (س) قابلة للإشتقاق عند س = ١   ∴ د (س) متصلة عند س = ١

∴ د (١) = د (١^{-}) = د (١^{+})   ∴ ٢ ل + م = ١ − ل

∴ ٣ ل + م = ١   (١)

، د$'$ (س) = { ٢ س ، س > ١ ؛ ٢ ل ، س < ١ }

، ∵ $د'(١^+) = د'(١^-)$ ∴ ٢ ل = ٢ ∴ ل = ١

بالتعويض فى (١) ينتج : م = − ٢

(٣) $د(س) = \begin{cases} ل س^٣ - ١ & ، س \geq ١ \\ م س^٢ + ن س & ، س < ١ \end{cases}$

∵ د (س) قابلة للإشتقاق مرتين عند س = ١ ∴ $د(١^+) = د(١^-)$

∴ ل − ١ = م + ن (١)

، $د'(س) = \begin{cases} ٣ ل س^٢ & ، س > ١ \\ ٢ م س + ن & ، س < ١ \end{cases}$ ، $د''(س) =$

، ∵ $د'(١^+) = د'(١^-)$ ∴ ٣ ل = ٢ م + ن (٢)

، ∵ $د''(١^+) = د''(١^-)$ ∴ ٦ ل = ٢ م (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج : ل = ١ ، م = ٣ ، ن = − ٣

(٤) ∵ د (س) قابلة للإشتقاق عند س = ٢ ∴ د (س) متصلة عند س = ٢

∴ $د(٢^+) = د(٢^-) = ٠$ ∴ ٢ ل + ك + ن = ٧ (١)

، $د'(س) = \begin{cases} ٢ ل س + ك & ، س > ٢ \\ ٧ & ، س < ٢ \end{cases}$

، ∵ $د'(٢^+) = د'(٢^-)$ ∴ ٤ ل + ك = ٧ (٢)

، ∵ متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ٦,٥

، د (٣) − د (١) = ٧ × ٣ − ن − (ل + ك + ن) = ٢١ − ٢ ن − ل − ك

∴ $\frac{١}{٢}$ (٢١ − ٢ ن − ل − ك) = $\frac{١٣}{٢}$ ∴ ٢ ن + ل + ك = ٨ (٣)

من (٢) ، (٣) ينتج : ٣ ل + ك = ٤ (٤)

، من (١) ، (٤) ينتج : ل = ١ ، ك = ٣ ، من (١) ينتج : ن = ٢

(٥) $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^٢$ ∴ $\frac{ءس}{ءص} = \frac{١}{٣ س^٢}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٢ س$

∴ $\frac{ءع}{ءص} = \frac{ءع}{ءس} \times \frac{ءس}{ءص} = ٢ س \times \frac{١}{٣ س^٢} = \frac{٢}{٣ س}$

$\frac{ء^٢ع}{ءص^٢} = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٢}{٣ س}\right) \cdot \frac{ءس}{ءص} = -\frac{٢}{٣ س^٢} \times \frac{١}{٣ س^٢}$

∴ س = ٢ فإن : $\frac{ء^٢ع}{ءص^٢} = -\frac{١}{٧٢}$

حل آخــــــــر

∵ $ص = س^٣ + ٢$ ∴ عندما س = ٢ فإن : ص = ١٠

، $س = (ص - ٢)^{\frac{١}{٣}}$ ∴ $ع = (ص - ٢)^{\frac{٢}{٣}} + ٣$

∴ $\frac{ءع}{ءص} = \frac{٢}{٣}(ص - ٢)^{-\frac{١}{٣}}$ ، $\frac{ء^٢ع}{ءص^٢} = -\frac{٢}{٩}(ص - ٢)^{-\frac{٤}{٣}}$

، عندما ص = ١٠ فإن : $\frac{ء^٢ع}{ءص^٢} = -\frac{١}{٧٢}$

(٦) ∵ $س^م ص^ن = ١$ ، بالإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $س^م \times ن ص^{ن-١} \frac{ءص}{ءس} + م س^{م-١} \times ص^ن = ٠$

بالقسمة على $س^{م-١} \times ص^{ن-١}$ ينتج :

$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{م ص}{ن س}$ (١) ، بالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{ن س \left(م \frac{ءص}{ءس} \right) - م ص}{ن^٢ س^٢}$ بالتعويض من (١) ينتج :

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{م ص (م + ن)}{ن^٢ س^٢}$

(٧) ∵ $س^{م} ص^{ن} = (س + ص)^{م + ن}$ بالإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $س^{ن} \times م ص^{م - ١} \frac{ءص}{ءس} + ن س^{ن - ١} \times ص^{م}$

$= (م + ن) (س + ص)^{م + ن - ١} (١ + \frac{ءص}{ءس})$

بقسمة الطرفين على : $س^{م} ص^{ن} = (س + ص)^{م + ن}$ ينتج :

$\frac{م}{ص} \times \frac{ءص}{ءس} + \frac{ن}{س} = \frac{م + ن}{س + ص} + \frac{م + ن}{س + ص} \times \frac{ءص}{ءس}$

∴ $(\frac{م}{ص} - \frac{م + ن}{س + ص}) \frac{ءص}{ءس} = \frac{م + ن}{س + ص} - \frac{ن}{س}$

∴ $(\frac{م س + م ص - م ص - ن ص}{ص (س + ص)}) \frac{ءص}{ءس} = \frac{م س + ن س - ن س - ن ص}{س (س + ص)}$

ومنها ينتج : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص}{س}$

(٨) $\frac{ءص}{ءس} = (س + \sqrt{١ + س^{٢}})^{٤} (١ + \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}})$

بالإختصار و التعويض ينتج :

$(\sqrt{١ + س^{٢}}) \frac{ءص}{ءس} = ٥ ص$ بالتربيع ينتج :

$(١ + س^{٢}) (\frac{ءص}{ءس})^{٢} = ٢٥ ص^{٢}$ بالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س

$٥٠ ص \frac{ءص}{ءس} = ٢ س (\frac{ءص}{ءس})^{٢} + ٢ \frac{ءص}{ءس} \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} (١ + س^{٢})$

و منها بالقسمة على $٢ \frac{ءص}{ءس}$ ينتج :

$(١ + س^{٢}) \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + س \frac{ءص}{ءس} - ٢٥ ص = ٠$

(٩) ∵ ص = د (س) ، ع = ر (س) بالإشتقاق مرتين بالنسبة إلى س ينتج :

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{ء^{٢}ص}{ءع^{٢}} \times \frac{ءع}{ءس} \times \frac{ءع}{ءس} + \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ء^{٢}ع}{ءس^{٢}}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{ء^{٢}ص}{ءع^{٢}} \times (\frac{ءع}{ءس})^{٢} + \frac{ء^{٢}ع}{ءس^{٢}} \times \frac{ءص}{ءع}$

(١٠) $د'(س) = \frac{ر (س) \cdot ق'(س) - ق (س) \cdot ر'(س)}{[ر (س)]^{٢}}$

$د'(ك) = \frac{ر (ك) \cdot ق'(ك) - ق (ك) \cdot ر'(ك)}{[ر (ك)]^{٢}}$

، ∵ $د'(ك) = ٠$ ∴ $ر (ك) \cdot ق'(ك) = ق (ك) \cdot ر'(ك)$

∴ $\frac{ق (ك)}{ر (ك)} = \frac{ق'(ك)}{ر'(ك)}$ ∴ $د (ك) = \frac{ق'(ك)}{ر'(ك)}$

(١١) نفرض أن : $ص = \sqrt{٨ + س^{٢}}$ ، $ع = \frac{س}{س + ١}$

∴ المطلوب إيجاد $\frac{ءص}{ءع}$ عندما س = ١

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{\sqrt{٨ + س^{٢}}}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{(س + ١)^{٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{س (س + ١)^{٢}}{\sqrt{٨ + س^{٢}}}$ ، عندما س = ١ يكون : $\frac{ءص}{ءع} = \frac{٤}{٣}$

(١٢) $\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{\text{١ + ٢س}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٣}}$

، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} \right) \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\frac{\text{١ + ٢س}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٣}} \right) \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{(س}^{٢}\text{ + ٣) × ٢ − (١ + ٢س) × ٢س}}{\text{(س}^{٢}\text{ + ٣)}^{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٣}}$

، عندما س = ١ فإن : $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٣٢}}$

(١٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{− ٢ حا ٢ س}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{− ٤ حتا ٢ س}$

∴ الطرف الأيمن = $\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} \right)^{٢} + ٤ \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \right)^{٢}$

= ١٦ $\text{حتا}^{٢}$ ٢ س + ١٦ $\text{حا}^{٢}$ ٢ س

= ١٦ ($\text{حتا}^{٢}$ ٢ س + $\text{حتا}^{٢}$ ٢ س) = ١٦

(١٤) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − س حا س + حتا س ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = − س حتا س − حتا س

عندما س = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ فإن : $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٠ − ١ = − ١

(١٥) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ ك $\text{س}^{٢}$ + ٢ م س ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ ك س + ٢ م

، $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ = ٦ ك ∴ ٦ ك = ١٢ و منها : ك = ٢

∵ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ عندما س = ١

∴ ٦ ك + ٢ م = ٦ ∴ ١٢ + ٢ م = ٦

و منها : م = − ٣

(١٦) ∵ $\text{د}''$(س) + $\text{د}'$(س) = $\text{س}^{٣}$ + ٥ $\text{س}^{٢}$ + س + ٢

∴ د (س) دالة من الدرجة الرابعة

نفرض أن : د (س) = ك $\text{س}^{٤}$ + م $\text{س}^{٣}$ + ل $\text{س}^{٢}$ + أ س + ء

∴ $\text{د}'$(س) = ٤ ك $\text{س}^{٣}$ + ٣ م $\text{س}^{٢}$ + ٢ ل س + أ

، $\text{د}''$(س) = ١٢ ك $\text{س}^{٢}$ + ٦ م س + ٢ ل

∴ $\text{د}''$(س) + $\text{د}'$(س) = ٤ ك $\text{س}^{٣}$ + (١٢ ك + ٣ م) $\text{س}^{٢}$ + س (٦ م + ٢ ل) + (٢ ل + أ)

، ∵ $\text{د}''$(س) + $\text{د}'$(س) = $\text{س}^{٣}$ + ٥ $\text{س}^{٢}$ + س + ٢

∴ ٤ ك = ١ و منها : ك = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

، ١٢ ك + ٣ م = ٥ و منها : م = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

، ٦ م + ٢ ل = ١ و منها : ل = − $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

، ٢ ل + أ = ٢ و منها : أ = ٥

تمارين (٤)

(١) ∵ ٢ ص ص$'$ = ١ ∴ ص$'$ = $\frac{١}{٢ ص}$ ، ∵ ص$'$ = $-\frac{١}{٢}$

∴ ص = −١ ∴ س = ٢

∴ معادلة المماس هى : ص + ١ = $-\frac{١}{٢}$ (س − ٢) أى : س + ٢ ص = ٠

(٢) ∵ ٢ س − ٢ ص − ٢ س ص$'$ − ٢ ص ص$'$ = ٠ ∴ ص$'$ = $\frac{س - ص}{س + ص}$

، عند النقطة (١ ، ٠) : ميل المماس = ١ ، ميل العمودى عليه = − ١

∴ معادلة المماس هى : ص = س − ١ ، معادلة العمودى عليه هى : ص = − س + ١

(٣) النقط الواقعة على المنحنى و تحقق معادلته تكون على الصورة (ك ، ك^٣)

، ∵ ص = س^٣ ∴ ميل المماس = $\frac{ك^٣}{ك - ٤}$

، ص$'$ = ٣ س^٢ ∴ ميل المماس عند (ك ، ك^٣) = ٣ ك^٢

∴ $\frac{ك^٣}{ك - ٤}$ = ٣ ك^٢ و منها : ٢ ك^٢ (ك − ٦) = ٠

∴ ك = ٠ ، ك = ٦ ∴ النقط هى (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٢١٦)

(٤) عند : س = ٢ فإن : ص = س^٢ − ٣ س

∴ ص = − ٢ ، ص$'$ = ٢ س − ٣ ∴ ميل المماس = ١

، عند : س = − ١ فإن : ص = − س^٢ − ٣ س

∴ ص = − ٤ ، ص$'$ = − ٢ س − ٣

∴ ميل المماس = − ١ ∴ ميل العمودى = ١

∴ المماس للمنحنى عند النقطة س = ٢ يوازى العمودى على المنحنى عند النقطة س = − ١

، معادلة المماس للمنحنى عند س = ٢ هى :

ص + ٢ = س − ٢ أى : س − ص − ٤ = ٠

، معادلة العمودى على المنحنى عند س = − ١ هى :

ص + ٤ = س + ١ أى : س − ص + ٣ = ٠

(٥) بالنسبة للمنحنى الأول : ∵ (− ١ ، ٢) تقع عليه ∴ ٢ = − ك − ل (١)

، ص$'$ = ٣ ك س^٢ + ل ∴ ميل المماس له = ٣ ك + ل

بالنسبة للمنحنى الثانى : ∵ (− ١ ، ٢) تقع عليه ∴ ٢ = م + ١ ∴ م = ١

، ص$'$ = ٢ م س − ١ ∴ ميل المماس له = − ٢ م − ١

∵ م = ١ ∴ ميل المماس له " المماس المشترك " = − ٣

، ∵ المماس مشترك عند (− ١ ، ٢) ∴ ٣ ك + ل = − ٣ (٢)

بحل (١) ، (٢) ينتج : ك = $-\frac{١}{٢}$ ، ل = $-\frac{٣}{٢}$

∴ معادلة المماس المشترك هى :

ص − ٢ = − ٣ (س + ١) أى : ٣ س + ص + ١ = ٠

(٦) نوجد نقط التقاطع بحل معادلتى المنحنيين معاً ∴ س^٢ = ١ − $\frac{١}{٣}$ س^٢

و منها س^٢ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ س = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∵ للمنحنى الأول : ص$'$ = ٢ س ، للمنحنى الثانى : ص$'$ = − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ عند س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، م$_١$ = $\sqrt{٣}$ ، م$_٢$ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

، عند س = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، م$_١$ = − $\sqrt{٣}$ ، م$_٢$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

، ∵ م$_١$ × م$_٢$ = − ١ عند س = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ المنحنيين متقاطعين على التعامد

(٧) ∵ للمنحنى الأول : ص/ = ٢ ك س ، للمنحنى الثانى : ص/ = − ٢ ن س

∴ عند س = √٣ / ٢ ∴ م١ = √٣ ك ، م٢ = − √٣ ن

، ∵ المنحنيين متقاطعين على التعامد عند النقطة (√٣ / ٢ ، ٣/٤) ، م١ × م٢ = − ١

∴ √٣ ك × − √٣ ن = − ١ ∴ ٣ ك ن = ١

، ٣/٤ = ٣/٤ ك ∴ ك = ١ ، ن = ١/٣

، ٣/٤ = ل − ١/٣ × ٣/٤ و منها : ل = ١

(٨) ∵ ٢ س + ٢ ص ص/ = ٠ ∴ ص/ = − س/ص (١)

، ∵ المماسان يميلان على المحور السينى الموجب بزاوية ظلها يساوى ٢

∴ ص/ = ٢ ∴ من (١) ينتج : س = − ٢ ص

، بالتعويض فى معادلة المنحنى ينتج : ص = ١ ، ص = − ١

∴ المماس الأول يمر بالنقطة (− ٢ ، ١) ، المماس الثانى يمر بالنقطة (٢ ، − ١)

∴ معادلة المماس الأول هى :

ص − ١ = ٢ (س + ٢) أى : ٢ س − ص + ٥ = ٠

، معادلة المماس الثانى هى :

ص + ١ = ٢ (س − ٢) أى : ٢ س − ص − ٥ = ٠

(٩) نفرض أن نقطة التماس هى (ك ، ن) ∴ المنحنى يمر بها

∴ ن = ك² − ك (١)

، ∵ ص/ = ٢ س − ١ ∴ ميل المماس = ٢ ك − ١

∴ معادلة المماس هى : ص − ن = (٢ ك − ١) (س − ك) (٢)

، ∵ المماس يمر بالنقطة (١ ، − ٤) ∴ − ٤ − ن = (٢ ك − ١) (١ − ك)

، بالتعويض من (١) ينتج : − ٤ − ك² + ك = − ٢ ك² + ٣ ك − ١

أى : ك² − ٢ ك − ٣ = ٠ و منها ينتج : ك = − ١ أو ك = ٣

، بالتعويض فى (١) ينتج : ن = ٢ أو ن = ٦

، بالتعويض فى (٢) ينتج أن معادلة المماس هى :

٥ س − ص − ٩ = ٠ أو ٣ س + ص + ١ = ٠

(١٠) ص/ = − ٢ س ∴ ميل العمودى عند النقطة (١ ، ٣) = ١/٢

∴ معادلة العمودى هى : س = ٢ ص − ٥ ، بالتعويض فى معادلة المنحنى ينتج :

ص = ٤ − (٢ ص − ٥)² و منها : (٤ ص − ٧) (ص − ٣) = ٠

أى أن : ص = ٧/٤ ، ص = ٣ " هى النقطة المعطاه "

∴ س = ٢ × ٧/٤ − ٥ = − ٣/٢ ∴ ل = (− ٣/٢ ، ٧/٤)

∴ ميل المماس عند ل = − ٢ × − ٣/٢ = ٣

∴ معادلة المماس عند النقطة ل هى :

ص − ٧/٤ = ٣ (س + ٣/٢) أى : ١٢ س − ٤ ص + ٢٥ = ٠

(١١) ٤ ص/ = − ٢ س ∴ ص/ = − ١/٢ س ∴ ميل المماس عند ك (− ١ ، ٢) = ١/٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ٢ = ١/٢ (س + ١) أى : س − ٢ ص + ٥ = ٠

، معادلة المماس هى : ص − ٢ = − ٢ (س + ١) أى : ٢ س + ص = ٠

لإيجاد نقط تقاطع المماس و العمودى مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ نقط تقاطع المماس و العمودى مع محور السينات هى :

ل (− ٥ ، ٠) ، ن (٠ ، ٠) على الترتيب

∴ (ك ل)² = (− ٥ − ١)² + (٠ − ٢)² = √٢٠ = ٢ √٥

، (ك ن)² = (٠ − ١)² + (٠ − ٢)² = √٥

∴ مساحة المثلث ك ل ن " المكون من محور السينات و المماس و العمودى "

= ١/٢ × ٢ √٥ × √٥ = ٥ وحدة مساحة

(١٢) ص/ = ٢ س − ٥

∴ المماس و العمودى عليه يصنعان مع محور السينات مثلث متساوى الساقين و قائم الزاوية

∴ ميلا المماس و العمودى = ± ١ ∴ ص/ = ± ١

∴ ٢ س − ٥ = ١ أو ٢ س − ٥ = −١

∴ س = ٣ ، ص = −٦ أو س = ٢ ، ص = −٦

∴ النقط هى (٣ ، −٦) أو (٢ ، −٦)

(١٣) ص/ = −٢ س (١)

∵ المماسان المرسومان من النقطة المطلوبة و المستقيم المار بنقطة التماس يصنعان مثلث متساوى الأضلاع

∴ فهما يصنعان مع المحور السينى الموجب زاويتين قياسيهما ٦٠° ، ١٢٠°

∴ ص/ = ± √٣

عندما : ص/ = √٣ ∴ من (١) ينتج : −٢ س = √٣

∴ س = − √٣ / ٢ ∴ من معادلة المنحنى ينتج : ص = − ٣/٤

عندما : ص/ = −√٣ ∴ من (١) ينتج : −٢ س = −√٣

∴ س = √٣ / ٢ ∴ من معادلة المنحنى ينتج : ص = − ٣/٤

∴ النقط هى : (− √٣ / ٢ ، − ٣/٤) ، (√٣ / ٢ ، − ٣/٤)

(١٤) عند س = ١/٤ ط فإن : ص = حا ١/٢ ط − حتا ط = ٢

∴ النقطة هى : (١/٤ ط ، ٢)

∵ ص/ = ٢ حتا ٢ س + ٤ حتا ٤ س

∴ ميل المماس = ٢ حتا ١/٢ ط + ٤ حتا ط = صفر

∴ معادلة المماس هى : ص − ٢ = ٠ ، معادلة العمودى هى : س − ١/٤ ط = ٠

(١٥) نفرض أن الدالة التربيعية هى : ص = ل (س + ع)٢ + ر

∵ أقل إرتفاع للسلك الكهربائى = ١٨ م

∴ ع = ٠ ، ر = ١٨

∴ ص = ل س٢ + ١٨ (١)

∵ إرتفاع الحاملين ٣٠ م

∴ أ = (١٨ ، ٣٠) بالتعويض فى (١) ينتج :

٣٠ = ل × ١٨ × ١٨ + ١٨

و منها : ل = ١/٢٧

∴ ص = ١/٢٧ س٢ + ١٨

∴ ص/ = ٢/٢٧ س

، عند أ = (١٨ ، ٣٠) يكون ميل المماس = ٢/٢٧ × ١٨ = ٤/٣ ∴ ميل العمودى = − ٣/٤

∴ معادلة المماس عند أ هى : ص − ٣٠ = ٤/٣ (س − ١٨) أى : ٤ س − ٣ ص − ١٨ = ٠

، عند س = ٠ ينتج : ص = ٦ ∴ و ن = ٦ م

∴ معادلة العمودى عند أ هى :

ص − ٣٠ = − ٣/٤ (س − ١٨) أى : ٣ س + ٤ ص − ١٧٤ = ٠

، عند ص = ٠ ينتج : س = ٥٨ ∴ و ل = ٥٨ م

∴ ب ل = ٥٨ − ١٨ = ٤٠ م " لأن : و ب = ١/٢ ب ء = ١/٢ × ٣٦ = ١٨ "

" لاحظ أن : هـ نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية ، الحاملين على إرتفاعين متساويين "

مساحة شبه المنحرف أ ب و ن = ١/٢ × (و ن + أ ب) × و ب

= ١/٢ × (٦ + ٣٠) × ١٨ = ٣٢٤ م٢

تمارين (٥)

(١) ءص/ءن = ٥ ءس/ءن − ٣ س² ءس/ءن ، ∵ ءص/ءن = − ½ عند س = ٣

∴ − ½ = ٥ ءس/ءن − ٢٧ ءس/ءن و منها : ءس/ءن = ١/٤٤ وحدة / ث

، ∵ ءص/ءس = ٥ − ٣ س²

، ء/ءن (ءص/ءس) = ء/ءس (ءص/ءس) ءس/ءن = − ٦ س × ءس/ءن

∴ معدل تغير ميل المنحنى بالنسبة للزمن عند (س = ٣) = − ٦ × ٣ × − ١/٤٤

= − ٩/٢٢ وحدة / ث

(٢) ٢ س ءس/ءن + ٢ ص ءص/ءن = ٠ ، ∵ ءس/ءن = ءص/ءن ∴ س = − ص

بالتعويض فى معادلة المنحنى ينتج : ص² = ٤ و منها : ص = ٢ ∴ س = − ٢

و : ص = − ٢ ∴ س = ٢ ∴ النقطة هى : (− ٢ ، ٢) أو (٢ ، − ٢)

(٣) نفرض أن الطول = س سم ، طول القطر = ٥/٤ س سم

∴ العرض = ٣/٤ س سم

المساحة " م " = س × ٣/٤ س = ٣/٤ س² ،

∴ ءم/ءن = ٣/٢ س ءس/ءن

∴ − ٣٠ = ٣/٢ س × (− ١٠) و منها : س = ٢ سم

∴ الطول = ٢ سم ، العرض = ٣/٢ سم

∴ مساحة الصفيحة = ٢ × ٣/٢ = ٣ سم²

حل آخر

نفرض أن : الطول = ٤ س سم ∴ القطر = ٥ س سم ∴ العرض = ٣ س سم

∴ ء٤س/ءن = ٤ ءس/ءن = − ١٠ ∴ ءس/ءن = − ٥/٢ ∴ م = ١٢ س²

∴ ءم/ءن = ٢٤ س ءس/ءن ∴ − ٣٠ = ٢٤ س × (− ٥/٢) و منها : س = ½ سم

∴ الطول = ٢ سم ∴ العرض = ٣/٢ سم ∴ مساحة الصفيحة = ٢ × ٣/٢ = ٣ سم²

(٤) نفرض أن الطول = س سم ، العرض = ص سم

∴ س ص = ٨ ∴ ص = ٨/س

∴ ءص/ءن = − ٨/س² ءس/ءن ∴ ءص/ءن = − ٨/س² × ٠,٤

و منها : س² = ٦٤ ∴ س = ٨ ∴ ص = ١ سم

(٥) من الشكل المقابل : أ ب = (٩٠ + ص) م ، ب حـ = (س) م

، بعد ثانيتين : ص = ٢ × ١٥ = ٣٠ م ، س = ٢ × ٢٥ = ٥٠ م

∴ أ ب = ١٢٠ م ، ب حـ = ٥٠ م ∴ ف = ١٣٠ م

، ف² = س² + (٩٠ + ص)²

∴ ٢ ف ءف/ءن = ٢ س ءس/ءن + ٢ (٩٠ + ص) × ١ × ءص/ءن

∴ ٢ × ١٣٠ × ءف/ءن = ٢ × ٥٠ + ٢ × ١٢٠ × ١ × ١٥

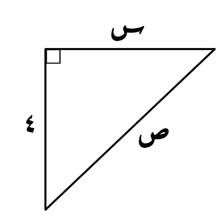
و منها : ءف/ءن = ٢٣ ٦/١٣ م / ث

(٦) من الشكل المقابل : س² = ص² − ١٦

عندما : ص = ٥ فإن : س = ٣

، ∵ ٢ س ءس/ءن = ٢ ص ءص/ءن ∴ ٣ ءس/ءن = ٥ × ٣٠٠

∴ ءس/ءن = ٥٠٠ كم / س " السرعة الأفقية للطائرة "



(٧) من الشكل المقابل :

فى أى لحظة نفرض أن السفينة الأولى تكون على بعد س كم من الميناء (و) ، و السفينة الثانية عل بعد ص كم منه ، المسافة بينهما ف كم

∴ ف² = س² + ص² − ٢ س ص حتا ٦٠° = س² + ص² − س ص (١)

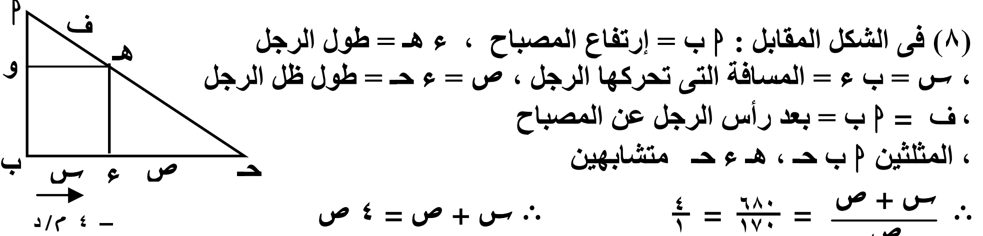
، ٢ ف ءف/ءن = ٢ س ءس/ءن + ٢ ص ءص/ءن − س ءس/ءن − ص ءص/ءن

∴ ٢ ف ءف/ءن = س ءس/ءن + ص ءص/ءن (٢)

عند الساعة الحادية عشر : س = ٢٠ × ٢ = ٤٠ كم ، ص = ٤٠ × ١ = ٤٠ كم

، من (١) : ف² = ١٦٠٠ + ١٦٠٠ − ١٦٠٠ = ١٦٠٠ ∴ ف = ٤٠ كم

∴ من (٢) : ٨٠ ءف/ءن = ٤٠ × ٢٠ + ٤٠ × ٤٠ و منها : ءف/ءن = ٣٠ كم / س



(٨) فى الشكل المقابل : أ ب = إرتفاع المصباح ، ء هـ = طول الرجل

، س = ب ء = المسافة التى تحركها الرجل ، ص = ء حـ = طول ظل الرجل

، ف = أ ب = بعد رأس الرجل عن المصباح

، المثلثين أ ب حـ ، هـ ء حـ متشابهين

∴ (س + ص) / ص = ٦٨٠ / ١٧٠ = ٤ / ١ ∴ س + ص = ٤ ص

∴ س = ٣ ص ∴ ءس/ءن = ٣ ءص/ءن ∴ ءص/ءن = −٤/٣ م/د

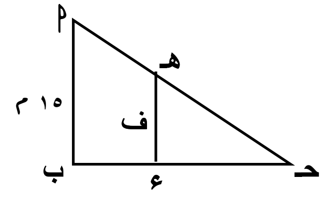
، من المثلث أ و هـ : ف² = س² + (٥١٠)² " لأن : أ و = ٦٨٠ − ١٧٠ = ٥١٠ "

، عندما : س = ٦٨٠ فإن : ف = ٨٥٠ ، ٢ ف ءف/ءن = ٢ س ءس/ءن

∴ ٥٨٠ ءف/ءن = ٦٨٠ × (−٤) و منها : ءف/ءن = −٣٢٠ م/د

(٩) ∵ ف = ع. ن − ½ ء ن² ∴ ف = ٥ ن − ½ × ٩,٨ × ن²

∴ ءف/ءن = ٥ − ٩,٨ ن ∴ عند : ن = ½ فإن : ف = ١,٢٧٥ م



∴ ءف/ءن = ٥ − ٩,٨ × ½ = ٠,١ م/د

من الشكل : المثلثين أ ب حـ ، هـ ء حـ متشابهين

∴ ف / ١٥ = (ص − ١٢) / ص

حيث : ص = ب حـ = بعد الكرة عن قاعدة العمود ، ف = ء هـ = المسافة التى تحركتها الكرة

∴ ١٥ ص − ١٨٠ = ف ص أى أن : ص = ١٨٠ / (١٥ − ف)

∴ ءص/ءن = (١٨٠ ءف/ءن) / (١٥ − ف)² = ٠,٠٩ تقريباً

(١٠) نفرض أن : عرض القاعدة = س سم

∴ طول القاعدة = س + ٢ سم ، الإرتفاع = ٣ س سم

∴ ع = س × (س + ٢) × ٣ س = ٣ س³ + ٦ س²

∴ ءع/ءن = ٩ س² × ءس/ءن + ١٢ س × ءس/ءن

∴ ٠,٦ = (٩ س² + ١٢ س) × ٠,٠١ ∴ ٦٠ = ٩ س² + ١٢ س

∴ ٣ س² + ١٢ س − ٢٠ = ٠ ∴ (س − ٢) (٣ س + ١٠) = ٠

∴ س = ٢ ، س = −١٠/٣ مرفوض

∴ الأبعاد هى : ٢ ، ٤ ، ٦ سم

(١١) فى الشكل المقابل :

س = أ ء = المسافة التى تحركها الطرف أ مبتعداً عن الحائط

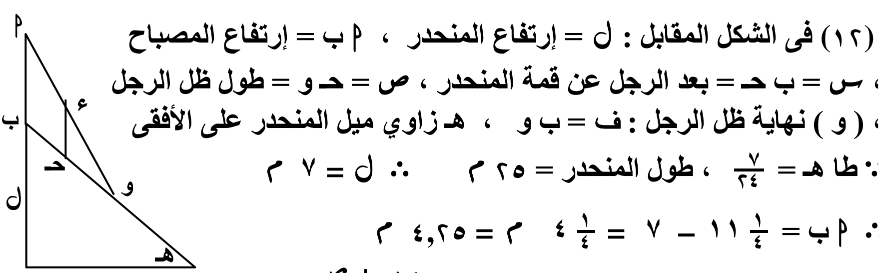
، ف = ب حـ = المسافة التى تحركها الطرف ب ، أ حـ = ١٠ − ف

من المثلث أ ء حـ : (١٠ − ف)² = س² + ٣٦

عندما يصل القضيب إلى حافة الحائط فإن : ف = ٠ ∴ س = ٨

، ٢ (١٠ − ف) ءف/ءن = ٢ س ءس/ءن

∴ ٢ × ١٠ × − ءف/ءن = ٢ × ٨ × ١,٥ و منها : ءف/ءن = − ١,٢ م/د



(١٢) فى الشكل المقابل : ل = إرتفاع المنحدر ، أ ب = إرتفاع المصباح

، س = ب حـ = بعد الرجل عن قمة المنحدر ، ص = حـ و = طول ظل الرجل

، (و) نهاية ظل الرجل : ف = ب و ، هـ زاوي ميل المنحدر على الأفقى

∵ طا هـ = $\frac{٧}{٢٤}$ ، طول المنحدر = ٢٥ م ∴ ل = ٧ م

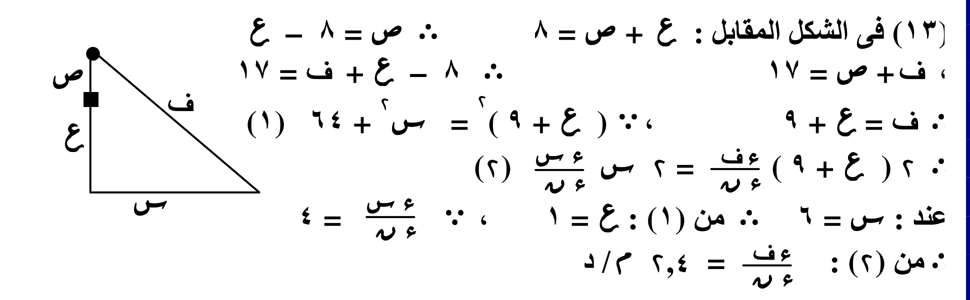
∴ أ ب = ١١ $\frac{١}{٤}$ − ٧ = ٤ $\frac{١}{٤}$ م = ٤,٢٥ م

∵ المثلثين أ ب و ، ء حـ و متشابهين ∴ $\frac{\text{س + ص}}{\text{ص}} = \frac{٤٢٥}{١٧٠} = \frac{٥}{٢}$

∴ ٢ س + ٢ ص = ٥ ص ∴ ٢ س = ٣ ص

∴ ٢ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٣ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ، ∵ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٦ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٤ م/د

، ∵ ف = س + ص ∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٦ + ٤ = ١٠ م/د



(١٣) فى الشكل المقابل : ع + ص = ٨ ∴ ص = ٨ − ع

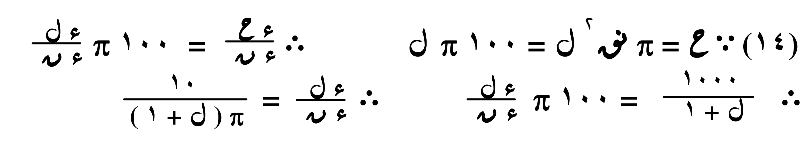
، ف + ص = ١٧ ∴ ٨ − ع + ف = ١٧

∴ ف = ع + ٩ ، ∵ $(ع + ٩)^٢ = س^٢ + ٦٤$ (١)

∴ ٢ (ع + ٩) $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ (٢)

عند : س = ٦ ∴ من (١) : ع = ١ ، ∵ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٤

∴ من (٢) : $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢,٤ م/د

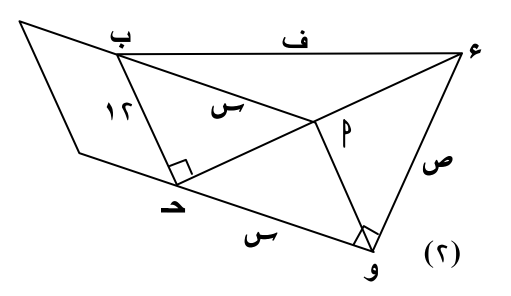


(١٤) ∵ ع = π نق^٢ ل = ١٠٠ π ل ∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ١٠٠ π $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$

∴ $\frac{١٠٠٠}{\text{ل} + ١}$ = ١٠٠ π $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$ ∴ $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = \frac{١٠}{π (\text{ل} + ١)}$

، عندما يمتلئ نصف البرميل يكون : ل = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩

∴ $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = \frac{١٠}{١٠ π} = \frac{١}{π}$



(١٥)من الشكل المقابل :

ف البعد بين الرجل و القارب

، س المسافة التى تحركها الرجل

، ص المسافة التى تحركها القرب

∵ $ف^٢ = س^٢ + ص^٢ + ١٤٤$ (١)

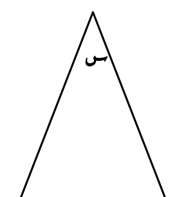
∴ ٢ ف $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ (٢)

، ∵ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٣ ، = ٦ و بعد ٦ دقائق :

س = ١٨ م ، ص = ٣٦ م ∴ من (١) : ف = ٤٢ م

، من (٢) : ٢ × ٤٢ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٢ × ١٨ × ٣ + ٢ × ٣٦ × ٦

∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{٤٥}{٧}$ م/د

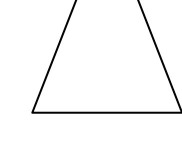


(١٦) مساحة المثلث (م) = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٦ × حا س

∴ م = ١٨ حا س ، $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ١٨ حتا س × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

، ∵ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٣° ، عندما س = ٦٠°

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ١٨ حتا ٦٠° × ٣ = ٥٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٣ = ٨١



(١٧) نفرض أن طول كل من ساقى المثلث = س سم

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س^٢

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{١}{\text{س}} \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ (١)

، ∵ طول وتر المثلث = س $\sqrt{٢}$

∴ محيطه (ع) = (٢ + $\sqrt{٢}$) س ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = (٢ + $\sqrt{٢}$) $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

بالتعويض من (١) و عندما س = ٨ سم فإن :

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = (٢ + $\sqrt{٢}$) × $\frac{١}{٨}$ × ٣٢ = ٤ (٢ + $\sqrt{٢}$) سم / ث

تمارين (٦)

(١) ∵ د (س) = $س^{٢}$ − ٤ س + ٥   ∴ د′ (س) = ٢ س − ٤ = ٢ (س − ٢)

∴ د′ (س) = ٠ عندما : س = ٢

د (س)	↘		↗
س		٢	
د′ (س)	−	٠	+

∵ د′ (س) > ٠ فى] ٢ ، ∞ [

∴ د (س) تزايدية فى] ٢ ، ∞ [

، ∵ د′ (س) < ٠ فى] − ∞ ، ٢ [∴ د (س) تناقصية فى] − ∞ ، ٢ [

(٢) ∵ د (س) = $(س − ١)^{\frac{٢}{٣}}$

∴ د′ (س) = $\frac{٢}{٣} (س − ١)^{-\frac{١}{٣}}$

= $\frac{٢}{٣ \sqrt[٣]{(س − ١)^{٢}}}$ (غير معرف عند س = ١)

د (س)	↘		↗
س		١	
د′ (س)	−	غير معرف	+

∵ عندما : س > ١ يكون : د′ (س) > ٠   ∴ د تزايدية فى] ١ ، ∞ [

، ∵ عندما : س < ١ يكون : د′ (س) < ٠   ∴ د تناقصية فى] − ∞ ، ١ [

(٣) ∵ ٩ − $س^{٢}$ = ٠   عندما : (٣ − س) (٣ + س) = ٠

أى عندما : س = ٣ ، س = − ٣   ∴ مجال د (س) = [− ٣ ، ٣]

، ∵ د (س) = $(٩ − س^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

∴ د′ (س) = $\frac{١}{٢} (٩ − س^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$ × (− ٢ س)

د (س)	↗		↘
س		٠	
د′ (س)	+	٠	−

و منها : د′ (س) = ٠   عندما : س = ٠

∵ د′ (س) > ٠ فى] − ٣ ، ٠ [∴ د (س) تزايدية فى] − ٣ ، ٠ [

، ∵ د′ (س) < ٠ فى] ٠ ، ٣ [∴ د (س) تناقصية فى] ٠ ، ٣ [

(٤) ∵ د (س) = س + $س^{-١}$ ∴ مجال د (س) = ح − { ٠ }

، د′ (س) = ١ − $س^{-٢}$ = ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$ حيث : س ≠ ٠

و منها : $س^{٢}$ = ١   أى : س = ١ ، س = − ١

أى أن : د′ (س) = ٠

عندما : س = ١ ، س = − ١

و غير معرف عندما : س = ٠

د (س)	↗		↘		↘		↗
س		− ١		٠		١	
د′ (س)	+	٠	−	غير معرف	−	٠	+

، ∵ د′ (س) > ٠ فى] ١ ، ∞ [،] − ∞ ، − ١ [

∴ د (س) تزايدية فى] ١ ، ∞ [،] − ∞ ، − ١ [

، ∵ د′ (س) < ٠ فى] − ١ ، ٠ [،] ٠ ، ١ [

∴ د (س) تناقصية فى] − ١ ، ٠ [،] ٠ ، ١ [

(٥) ∵ د′ (س) = { ٢ س − ٤ ، س < ٢ ؛ ٢ ، س > ٢ }

د (س)	↘		↗
س		٢	
د′ (س)	−	٠	+

، ∵ د′ (س) > ٠ فى] ٢ ، ∞ [∴ د (س) تزايدية فى] ٢ ، ∞ [

، د′ (س) < ٠ فى] − ∞ ، ٢ [∴ د (س) تناقصية فى] − ∞ ، ٢ [

(٦) ∵ د (س) = { $س^{٢}$ − ٣ س ، س ≥ ٣ ؛ ٣ س − $س^{٢}$ ، س < ٣ }   ∵ د′ (س) = { ٢ س − ٣ ، س > ٣ ؛ ٣ − ٢ س ، س < ٣ }

، ∵ د (س) غير قابلة للإشتقاق عندما : س = ٣

، د′ (س) = ٠   عندما : س = $\frac{٣}{٢}$

د (س)	↗		↘		↗
س		$\frac{٣}{٢}$		٣	
د′ (س)	+	٠	−	٠	+

، د′ (س) > ٠ فى] − ∞ ، $\frac{٣}{٢}$ [،] ٣ ، ∞ [

∴ د (س) تزايدية فى] − ∞ ، $\frac{٣}{٢}$ [،] ٣ ، ∞ [

، د′ (س) < ٠ فى] $\frac{٣}{٢}$ ، ٣ [∴ د (س) تناقصية فى] $\frac{٣}{٢}$ ، ٣ [

(٧) ∵ د (س) = { س^{٢} + ٢ ، س < ٠ ؛ ٣ ، ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٢ س − ٤ ، س > ٣ }

∴ د$'$ (س) = { ٢ س ، س < ٠ ؛ ٠ ، ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٢ ، س > ٣ }

د (س)	↘		——		↗
س		٠		٣	
د$'$ (س)	−	٠	٠	٠	+

، ∵ د$'$ (س) < ٠ فى] −∞ ، ٠ [
∴ د (س) تناقصية فى] −∞ ، ٠ [
، ∵ د$'$ (س) > ٠ فى] ٣ ، ∞ [
∴ د (س) تزايدية فى] ٣ ، ∞ [
، ∵ د (س) ثابتة فى] ٠ ، ٣ [أى أن : د$'$ (س) = ٠ فى] ٠ ، ٣ [
∴ د (س) مطردة التناقص فى] −∞ ، ٠ [، و مطردة التزايد فى] ٣ ، ∞ [

(٨) ∵ د (س) = { س^{٢} − ٥ س ، س ≥ ٥ ؛ ٥ س − س^{٢} ، س < ٥ }

∴ د$'$ (س) = { ٢ س − ٥ ، س > ٥ ؛ غير معرفة ، س = ٥ ؛ ٥ − ٢ س ، س < ٥ }

لأن : ∵ د$'$ (٥$^{-}$) = −٥ ، د$'$ (٥$^{+}$) = ٥
∴ د (س) غير قابلة للإشتقاق عند س = ٥ ∴ (٥ ، ٠) نقطة حرجة

، ∵ د$'$ (س) < ٠ عندما : س < ٥ ، د$'$ (س) > ٠ عندما : س > ٥
∴ (٥ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية
، ∵ د (س) = ٠ عندما : ٥ − ٢ س = ٠ أى عندما : س = $\frac{٥}{٢}$
، ∵ د$'$ (س) > ٠ عندما : س < $\frac{٥}{٢}$ ، د$'$ (س) < ٠ عندما : $\frac{٥}{٢}$ < س < ٥
∴ ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢٥}{٤}$) نقطة قيمة عظمى محلية

(٩) ∵ د (س) = (س^{٢} − ٤ س)$^{\frac{١}{٣}}$
∴ د$'$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س^{٢} − ٤ س)$^{-\frac{٢}{٣}}$ × (٢ س − ٤) = $\frac{٢ (س − ٢)}{٣ \sqrt[٣]{(س^{٢} − ٤ س)^{٢}}}$
حيث : غير معرف عند س = ٠ ، س = ٤
، ∵ د$'$ (س) < ٠ قبل و بعد : س = ٠ ، د$'$ (س) > ٠ قبل و بعد : س = ٤

∴ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية عند س = ٠ ، س = ٤
، ∵ د (س) = − $\sqrt[٣]{٤}$ عندما : س = ٢
، ∵ د$'$ (س) > ٠ عندما : س > ٢ ، د$'$ (س) < ٠ عندما : س < ٢
∴ (٢ ، − $\sqrt[٣]{٤}$) نقطة قيمة صغرى محلية

(١٠) ∵ د (س) = س^{٤} − ٤ ∴ د$'$ (س) = ٤ س^{٣} ، د$''$ (س) = ١٢ س^{٢}
، ∵ د$'$ (س) = ٠ عندما : س = ٠ ∴ س = ٠ نقطة حرجة للدالة
، ∵ د$''$ (س) = ٠ عندما : س = ٠
∴ د$''$ (س) لا تصلح لإختبار وجود قيم عظمى أو صغرى عند س = ٠
لذا نستخدم د$'$ (س)

، ∵ د$'$ (س) < ٠ عندما : س < ٠
، د$'$ (س) > ٠ عندما : س > ٠
∴ (٠ ، −٤) نقطة قيمة صغرى محلية

(١١) د$'$ (س) = ٤ س^{٣} − ١٢ س^{٢} + ٨ س = ٤ س (س^{٢} − ٣ س + ٢)
= ٤ س (س − ١) (س − ٢)
، ∵ د$'$ (س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ١ ، س = ٢
، د$''$ (س) = ١٢ س^{٢} − ٢٤ س + ٨
، ∵ د$''$ (٠) = ٨ > ٠ ∴ (٠ ، −١٥) نقطة قيمة صغرى محلية
، د$''$ (١) = −٤ < ٠ ∴ (٠ ، −١٤) نقطة قيمة عظمى محلية
، د$''$ (٢) = ٨ > ٠ ∴ (٢ ، −١٥) نقطة قيمة صغرى محلية

(١٢) ∵ د/(س) = $\frac{(\text{س}+٢)(٦\text{س}+٥) - (٣\text{س}^{٢}+٥\text{س}+٢٥)}{(\text{س}+٢)^{٢}}$

= $\frac{٣(\text{س}-١)(\text{س}+٥)}{(\text{س}+٢)^{٢}}$

، ∵ د/(س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = – ٥

، ∵ د/(س) > ٠ عندما : س > ١

، د/(س) < ٠ عندما : س < ١

∴ (١ ، ١١) نقطة قيمة صغرى محلية

، ∵ د/(س) > ٠ عندما : س > – ٥

، د/(س) < ٠ عندما : س < – ٥

∴ (– ٥ ، – ٢٥) نقطة قيمة عظمى محلية

د/(س)   + | –   (١)   د/(س)   + | –   (– ٥)

(١٣) د/(س) = ٣ س^{٢} – ٦ س + ٢٤ = ٣ (س – ٤) (س + ٢)

، د/(س) = ٠ عندما : س = ٤ ، س = – ٢

، ∵ د (– ٣) = ٦٨ ، د (– ٢) = ٧٨ ، د (٤) = – ٣٠ ، د (٥) = – ٢٠

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٧٨ عند س = – ٢

، القيمة الصغرى المطلقة = – ٣٠ عند س = ٤

(١٤) د/(س) = { ٢س – ٤ ، س > ٤ ؛ غير معرفة ، س = ٤ ؛ – ٣ ، س < ٤ }   لأن : د/(٤$^{-}$) = – ٣ ، د/(٤$^{+}$) = ٤

∴ س = ٤ نقطة حرجة ، د/(س) = ٠ عندما : س = ٢ ∴ س = ٢ نقطة حرجة

، ∵ د (٠) = ٣ ، د (٢) = – ١ ، د (٤) = ٣ ، د (٥) = ٠

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٣ عند س = ٠ ، س = ٤

، القيمة الصغرى المطلقة = – ١ عند س = ٢

(١٥) د/(س) = ٤ س^{٣} – ١٨ س^{٢} + ٢٤ س – ٨

، د//(س) = ١٢ س^{٢} – ٣٦ س + ٢٤ = ١٢ (س – ١) (س – ٢)

، د//(س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = ٢

، د//(س) < ٠ عندما : ١ < س < ٢

، د//(س) > ٠ عندما : س > ١ ، س < ٢

د//(س)   + | – | +   (١) (٢)   د (س)

∴ منحنى د (س) محدب إلى أعلى فى] ١ ، ٢ [

، و محدب إلى أسفل فى] – ∞ ، ١ [،] ٢ ، ∞ [

، (١ ، – ١) ، (٢ ، ٠) نقط إنقلاب

(١٦) د/(س) = ٦ س^{٢} – ١٨ س + ١٢ = ٦ (س – ١) (س – ٢)

، د/(س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = ٢

، د//(س) = ١٢ س – ١٨ ، د//(س) = ٠ عندما : س = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ د//(١) < ٠ ∴ (١ ، – ٥) نقطة قيمة عظمى محلية

، ∵ د//(٢) > ٠ ∴ (٢ ، – ٦) نقطة قيمة صغرى محلية

، ∵ د//(س) < ٠ عندما : س < $\frac{٣}{٢}$ ، د//(س) > ٠ عندما : س > $\frac{٣}{٢}$

∴ ($\frac{٣}{٢}$ ، – $\frac{١١}{٢}$) نقطة إنقلاب

(١٧) د/(س) = (س – ٣)^{٣} + ٣ س (س – ٣)^{٢} = (س – ٣)^{٢} (٤ س – ٣)

، د/(س) = ٠ عندما : س = ٣ ، س = $\frac{٣}{٤}$

، د//(س) = ٢ (س – ٣) (٤ س – ٣) + ٤ (س – ٣)^{٢}

= ٦ (س – ٣) (٢ س – ٣)

، د″ (س) = ٠ عندما : س = ٣ ، س = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ د′ (س) < ٠ عندما : س > ٣ ، د′ (س) < ٠ عندما : س > ٣

∴ (٣ ، ٠) ليست نقطة قيمة عظمى أو صغرى محلية

، ∵د″ ($\frac{٣}{٤}$) < ٠ ∴ ($\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٢١٨٧}{٢٥٦}$) نقطة قيمة صغرى محلية

، ∵د″ (س) < ٠ عندما : س > $\frac{٣}{٢}$ ، د″ (س) > ٠ عندما : س < $\frac{٣}{٢}$

∴ ($\frac{٣}{٢}$ ، – $\frac{٨١}{١٦}$) نقطة إنقلاب

، ∵د″ (س) < ٠ عندما : س < ٣ ، د″ (س) > ٠ عندما : س > ٣

∴ (٣ ، ٠) نقطة إنقلاب

(١٨) د′ (س) = ٣ س^٢ – ١٢ س + ١ (١)

، د″ (س) = ٦ س – ١٢ = ٦ (س – ٢) ، ∵ د″ (س) = ٠ عندما : س = ٢

∴ (٢ ، – ١٦) نقطة إنقلاب ، و من (١) ميل المماس عندها = – ١١

∴ معادلة المماس الإنقلابى هى : ص + ١٦ = – ١١ (س – ٢)

أى : ١١ س + ص – ٦ = ٠

(١٩) ∵ د (س) = س^٢ + ك س + ل ، د (٢) = ١

∴ ١ = ٤ + ٢ ك + ل (١)

، د′ (س) = ٢ س + ك ، س = ٢ نقطة حرجة

∴ د′ (٢) = ٠ ∴ ٤ + ك = ٠ و منها : ك = – ٤

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل = ٥

، ∵ د″ (س) = ٢ ، بالتالى : د″ (٢) > ٠ ∴ (٢ ، ١) نقطة قيمة صغرى محلية

(٢٠) ∵ د (س) = س^٢ + ك س + ل ، (١ ، – ٣) تحقق معادلة المنحنى

∴ – ٣ = ١ + ك + ل (١)

، د′ (س) = ٣ س^٢ + ٢ ك س + ل ، د″ (س) = ٦ س + ٢ ك

∴ د″ (س) = ٠ عندما : س = ١ ∴ ٦ + ٢ ك = ٠ و منها : ك = – ٣

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل = – ١

(٢١) ∵ د (س) = ك س^٣ + ل س^٢ + م س + ن ، (١ ، ٥) تحقق معادلة المنحنى

∴ ٥ = ك + ل + م + ن (١)

، (٢ ، ١) تحقق معادلة المنحنى ∴ ١ = ٨ ك + ٤ ل + ٢ م + ن (٢)

، د′ (س) = ٣ ك س^٢ + ٢ ل س + م ، ∵ المماس عند (٢ ، ١) ميله = – ٣

∴ – ٣ = ١٢ ك + ٤ ل + م (٣)

، د″ (س) = ٦ ك س + ٢ ل ، (٢ ، ١) نقطة إنقلاب له

∴ د″ (٢) = ٠ ∴ ١٢ ك + ٢ ل = ٠ ∴ ٦ ك + ل = ٠ (٤)

بطرح (٢) من (١) ينتج : – ٤ = ٧ ك + ٣ ل + م (٥)

بطرح (٣) من (٥) ينتج : ١ = ٥ ك + ل (٦)

بطرح (٦) من (٤) ينتج : ك = – ١ بالتعويض فى (٤) ينتج : ل = ٦

، بالتعويض فى (٣) ينتج : م = – ١٥ بالتعويض فى (١) ينتج : ن = ١٥

(٢٢) ∵ د (س) = ك س^٣ + ل س^٢ + م س + ن ، (٠ ، ٤) تحقق معادلة المنحنى

∴ ٤ = ن (١)

، (– ١ ، ٢) تحقق معادلة المنحنى ∴ ٢ = – ك + ل – م + ن

و بالتعويض من (١) ينتج : ٢ = ك – ل + م (٢)

، د′ (س) = ٣ ك س^٢ + ٢ ل س + م ، ∵ المماس عند (– ١ ، ٢) ميله = ٠

∴ ٠ = ٣ ك – ٢ ل + م (٣)

، د″ (س) = ٦ ك س + ٢ ل ، (– ١ ، ٢) نقطة إنقلاب له

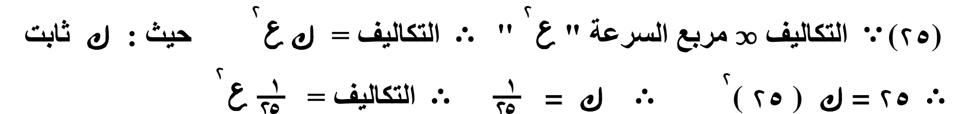
∴ د″ (– ١) = ٠ ∴ – ٦ ك + ٢ ل = ٠ ∴ – ٣ ك + ل = ٠ (٤)

بطرح (٣) من (٢) ينتج : – ٢ = ٢ ك – ل (٥)

بجمع (٤) ، (٥) ينتج : ك = ٢   بالتعويض فى (٤) ينتج : ل = ٦
، بالتعويض فى (٣) ينتج : م = ٦

(٢٣) د/ (س) = ٣ س^٢ − ٦ س = ٣ س (س − ٢)
، د// (س) = ٦ س − ٦ = ٦ (س − ١)
فترات التزايد و التناقص و نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :
∵ د/ (س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢
، ∵ د/ (س) < ٠ فى] ٠ ، ٢ [
∴ د (س) تناقصية فى] ٠ ، ٢ [
، ∵ د/ (س) > ٠ فى] ٢ ، ∞ [،] − ∞ ، ٠ [
∴ د (س) تزايدية فى] ٢ ، ∞ [،] − ∞ ، ٠ [
، ∵ د// (٠) = − ٦ < ٠ ∴ (٠ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية
، د// (٢) = ٦ > ٠ ∴ (٢ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية
فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب على أسفل و نقط الإنقلاب :
، د// (س) = ٠ عندما : س = ١
، د// (س) < ٠ عندما : س < ١
، د// (س) > ٠ عندما : س > ١
∴ منحنى د (س) محدب إلى أعلى فى] − ∞ ، ١ [
، و محدب إلى أسفل فى] ١ ، ∞ [
، (١ ، ٢) نقطة إنقلاب
نقط التقاطع مع المحورين :
∵ د (س) = (س^٣ + ١) − ٣ (س^٢ − ١)
= (س + ١) (س − ٢)^٢
∴ د (س) = ٠ عندما : س = − ١ ، س = ٢
، عندما : س = ٠ فإن : د (س) = − ١
نقط أخرى : (٣ ، ٤) ، (− ١ ، ٠)

(٢٤) د (س) = ٢ − س^٣ + ٦ س^٢ − ٩ س
د/ (س) = − ٣ س^٢ + ١٢ س − ٩ = − ٣ (س − ١) (س − ٣)
، د// (س) = − ٦ س + ١٢ = − ٦ (س − ٢)
فترات التزايد و التناقص و نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :
∵ د/ (س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = ٣
، ∵ د/ (س) > ٠ فى] ١ ، ٣ [
∴ د (س) تزايدية فى] ١ ، ٣ [
، ∵ د/ (س) < ٠ فى] ٣ ، ∞ [،] − ∞ ، ١ [
∴ د (س) تزايدية فى] ٣ ، ∞ [،] − ∞ ، ١ [
، ∵ د// (١) = ٦ > ٠ ∴ (١ ، − ٢) نقطة قيمة صغرى محلية
، د// (٣) = − ٦ < ٠ ∴ (٣ ، ٢) نقطة قيمة عظمى محلية
فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب على أسفل و نقط الإنقلاب :
، د// (س) = ٠ عندما : س = ٢
، د// (س) > ٠ عندما : س < ٢ ، د// (س) < ٠ عندما : س > ٢
∴ منحنى د (س) محدب إلى أسفل فى] − ∞ ، ٢ [
، و محدب إلى أعلى فى] ٢ ، ∞ [
، (٢ ، ٠) نقطة إنقلاب
نقط التقاطع مع المحورين : (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢)
نقط أخرى : (٤ ، − ٢)



(٢٥) ∵ التكاليف ∝ مربع السرعة " ع^٢ " ∴ التكاليف = ك ع^٢   حيث : ك ثابت
∴ ٢٥ = ك (٢٥)^٢ ∴ ك = ١/٢٥ ∴ التكاليف = ١/٢٥ ع^٢
∴ تكاليف الساعة الواحدة = ١/٢٥ ع^٢ + ١٠٠
∴ تكاليف الكيلو متر الواحد " ت " = (١/٢٥ ع^٢ + ١٠٠) / ع = ١/٢٥ ع + ١٠٠/ع

∴ ت′ = $\frac{\text{١}}{\text{٢٥}}$ − $\frac{\text{١٠٠}}{\text{ع}^{2}}$ ، ت″ = $\frac{\text{٢٠٠}}{\text{ع}^{3}}$

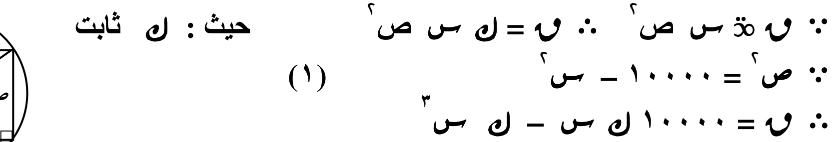
، ∵ ت′ = ٠ عندما ع = ٥٠

، ت″ (٥٠) > ٠

∴ تكلفة الكيلو متر الواحد تكون أقل ما يمكن عندما تكون سرعة القاطرة ٥٠ كم / س

(٢٦) نفرض أن بعدى المستطيل هما س ، ص ، قوى إحتمال قطعة الخشب = ق

من الشكل المقابل و هو مقطع من " قطعة الخشب "إسطوانة دائرية



∵ ق ∝ س ص^{2} ∴ ق = ك س ص^{2} حيث : ك ثابت

∵ ص^{2} = ١٠٠٠٠ − س^{2} (١)

∴ ق = ١٠٠٠٠ ك س − ك س^{3}

∴ ق′ = ١٠٠٠٠ ك − ٣ ك س^{2} ، ق″ = − ٦ ك س

∵ ق′ = ٠ عندما س = $\frac{\text{١٠٠}}{\sqrt{\text{٣}}}$

ق″ < ٠ عندما س = $\frac{\text{١٠٠}}{\sqrt{\text{٣}}}$

∴ ق تكون أكبر ما يمكن عندما س = $\frac{\text{١٠٠}}{\sqrt{\text{٣}}}$ = $\frac{\text{١٠٠}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣}}$

، من (١) ينتج : بعدى المستطيل هما : $\frac{\text{١٠٠}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{١٠٠}\sqrt{\text{٦}}}{\text{٣}}$ سم

(٢٧) نفرض أن بعدى النقطة عن طرفى قطر الدائرة هما : س ، ص سم

∵ ص^{2} = ١٠٠ − س^{2} (١) أى أن : ص = (١٠٠ − س^{2})$^{\frac{1}{2}}$

، ∵ المجموع (م) = س + ص = س + (١٠٠ − س^{2})$^{\frac{1}{2}}$

∴ م′ = ١ + $\frac{1}{2}$ (١٠٠ − س^{2})$^{-\frac{1}{2}}$ × (− ٢ س) = ١ − $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{١٠٠} - \text{س}^{2}}}$

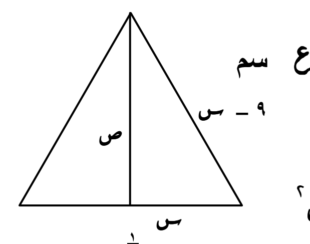
، م′ = ٠ عندما : ١ − $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{١٠٠} - \text{س}^{2}}}$ أى عندما : س = ٥ $\sqrt{\text{٢}}$

، ∵ م′ > ٠ عندما س < ٥ $\sqrt{\text{٢}}$ ، م′ < ٠ عندما س > ٥ $\sqrt{\text{٢}}$

∴ م تكون أكبر ما يمكن عندما : س = ٥ $\sqrt{\text{٢}}$ ، من (١) ينتج :

بعدى النقطة هما ٥ $\sqrt{\text{٢}}$ ، ٥ $\sqrt{\text{٢}}$ سم

(٢٨) نفرض أن طول قاعدة المثلث = ٢ س سم ، طول ساقه = ع سم



، ∵ محيطه = ١٨ سم ∴ ٢ س + ٢ ع = ١٨

∴ ع = ٩ − س سم

، ص^{2} = (٩ − س)^{2} − س^{2} = ٨١ − ١٨ س + س^{2} − س^{2}

= ٨١ − ١٨ س ∴ ص = (٨١ − ١٨ س)$^{\frac{1}{2}}$ = ٣ (٩ − ٢ س)$^{\frac{1}{2}}$ (١)

مساحة المثلث (م) = $\frac{1}{2}$ × ٢ س ص = ٣ س (٩ − ٢ س)$^{\frac{1}{2}}$

∴ م′ = ٣ (٩ − ٢ س)$^{\frac{1}{2}}$ + ٣ س × $\frac{1}{2}$ × (٩ − ٢ س)$^{-\frac{1}{2}}$ × (− ٢)

= ٣ × ($\frac{\text{٩} - \text{٢س} - \text{س}}{\sqrt{\text{٩} - \text{٢ س}}}$) = ٣ × ($\frac{\text{٩} - \text{٣ س}}{\sqrt{\text{٩} - \text{٢ س}}}$)

، م′ = ٠ عندما : ٩ − ٣ س أى عندما : س = ٣

، ∵ م′ > ٠ عندما س < ٣ ، م′ < ٠ عندما س > ٣

∴ م تكون أكبر ما يمكن عندما : س = ٣ ، من (١) ينتج : ص = ٣ $\sqrt{\text{٣}}$

∴ م = $\frac{1}{2}$ × ٢ × ٣ × ٣ $\sqrt{\text{٣}}$ = ٩ $\sqrt{\text{٣}}$ سم^{2}

(٢٩) نفرض أن بعدى المستطيل هما س متر ، ص متر

∵ مساحة المستطيل = س ص = ٢٨٨٨ ∴ ص = $\frac{\text{٢٨٨٨}}{\text{س}}$ (١)

، طول السور = (م) = ٢ س + ٤ ص

= ٢ س + ٤ × ٢٨٨٨ × $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

∴ م′ = ٢ − ٤ × ٢٨٨٨ × $\frac{\text{١}}{\text{س}^{2}}$

، منها : م/ = ٠ عندما : ٢ س^{٢} = ٤ × ٢٨٨٨
أى : س = ٧٦ ، ∵ م/ > ٠ عندما س > ٧٦
، م/ < ٠ عندما س < ٧٦
∴ م تكون أقل ما يمكن عندما : س = ٧٦
و من (١) ينتج : ص = ٣٨
أى أن بعدى المستطيل هما ٧٦ متر ، ٣٨ متر

(٣٠) نفرض أن طول قطر نصف الدائرة = ٢ س متر
، البعد الآخر للمستطيل = ص متر
∴ ٨ + ٢ ط = ٢ س + ٢ ص + ط س
و منها : ٢ ص = ٨ + ٢ ط − ٢ س − ط س
= ٢ (٤ + ط) − (٢ + ط) س (١)
، مساحة النافذة = (م) = ٢ س ص + $\frac{١}{٢}$ ط س^{٢} = س × ٢ ص + $\frac{١}{٢}$ ط س^{٢}
= ٢ (٤ + ط) س − (٢ + ط) س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ط س^{٢}
∴ م/ = (٨ + ٢ ط) − ٢ (٢ + ط) س + ط س = ٢ (٤ + ط) − (٤ + ط) س
، منها : م/ = ٠ عندما : س = ٢
∵ م/ > ٠ عندما س < ٢ ، م/ < ٠ عندما س > ٢
∴ م تكون أكبر ما يمكن عندما : س = ٢
∴ ٢ س = ٤ أى أن : طول قطر الدائرة = ٤ متر
، من (١) ينتج : ص = ٢ متر

(٣١) الشكل المقابل : يمثل المنحنى و المثلث
حيث : ص = ٣ − $\frac{١}{١٢}$ س^{٢} (١)
، مساحة النافذة = (م) = ٢ × $\frac{١}{٢}$ س ص = س ص
= س (٣ − $\frac{١}{١٢}$ س^{٢}) = ٣ س − $\frac{١}{١٢}$ س^{٣}

م/ = ٣ − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ، م// = − $\frac{١}{٢}$ س
∵ م/ = ٠ عندما : ٣ − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} و منها : س = ٢ $\sqrt{٣}$
، م// < ٠ عندما : س = ٢ $\sqrt{٣}$
∴ م تكون أكبر ما يمكن عندما : س = ٢ $\sqrt{٣}$ ، من (١) ينتج : ص = ٢
∴ م = س ص = ٢ $\sqrt{٣}$ × ٢ = ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

(٣٢) نفرض أن : طول ضلع المربع = س سم ، طول ضلع المثلث = ص سم
∴ ل = ٤ س + ٣ ص و منها : ص = $\frac{١}{٣}$ (ل − ٤ س) (١)
مجموع مساحتى المربع و المثلث (م) = س^{٢} + $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ص^{٢}

∴ م = س^{٢} + $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ (ل^{٢} − ٨ ل س + ١٦ س^{٢})
∴ م/ = ٢ س + $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ (− ٨ ل + ٣٢ س) ، م// = ٢ + ٣٢ $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$
∵ م/ = ٠ عندما : ٢ س + $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ (− ٨ ل + ٣٢ س)
و منها : س = $\frac{\sqrt{٣}\ ل}{٩ + ٤\sqrt{٣}}$ و حيث أن عندها م// > ٠
و من (١) : ص = $\frac{٣\ ل}{٩ + ٤\sqrt{٣}}$ ∴ س : ص = $\sqrt{٣}$: ٣
∴ النسبة بين طولى الجزئين = ٤ س : ٣ ص = ٤ $\sqrt{٣}$: ٩

(٣٣) ∵ ص = $\sqrt{س}$ (١)
∴ ف^{٢} = (س − ١)^{٢} + ص^{٢} = س^{٢} − ٢ س + ١ + س = س^{٢} − س + ١
∴ ف = (س^{٢} − س + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ ∴ ف/ = $\frac{٢ س − ١}{٢ \sqrt{س^{٢} − س + ١}}$

، ف$'$ = ٠ عندما : ٢ س − ١ أى عندما : س = $\frac{١}{٢}$

، $\because$ ف$'$ > ٠ عندما س < $\frac{١}{٢}$ ، ف$'$ < ٠ عندما س > $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ ف تكون أكبر ما يمكن عندما : س = $\frac{١}{٢}$ ، من (١) ينتج : ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٣٤) $\because$ المقاومة (م) = ﻫ س (١ − س)^{٢}

$\therefore$ م$'$ = ﻫ (١ − س)^{٢} − ٢ ﻫ س (١ − س)

، م$'$ = ٠ عندما : ﻫ (١ − س)^{٢} − ٢ ﻫ س (١ − س) أى عندما : س = $\frac{١}{٣}$

، $\because$ م$'$ < ٠ عندما س < $\frac{١}{٣}$ ، م$'$ > ٠ عندما س > $\frac{١}{٣}$ (ﻫ مقدار سالب)

$\therefore$ م تكون أقل ما يمكن عندما : س = $\frac{١}{٣}$

(٣٥) المساحة الكلية الخارجية للجسم = (م)

= $\frac{١}{٢}$ (المساحة الكلية للإسطوانة + مساحة الكرة)

= $\frac{١}{٢}$ ([٢ ط نق ع + ٢ ط نق^{٢}] + ٤ ط نق^{٢}) = ط نق ع + ٣ ط نق^{٢}

$\therefore$ ٢٠٠٠ ط = ط نق ع + ٣ ط نق^{٢} و منها : ع = $\frac{٢٠٠٠}{نق}$ − $\frac{٣}{٢}$ نق (١)

$\therefore$ حجم الجسم (ح) = ط نق^{٢} ع + $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} بالتعويض من (١)

$\therefore$ ح = ٢٠٠٠ ط نق − ٣ ط نق^{٣} + $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} بالإشتقاق بالنسبة إلى نق

$\therefore$ ح$'$ = ٢٠٠٠ ط − ٩ ط نق^{٢} + ٤ ط نق^{٢} = ٢٠٠٠ ط − ٥ ط نق^{٢}

، ح$''$ = − ١٠ ط نق

، $\because$ ح$'$ = ٠ عندما : ٢٠٠٠ ط − ٥ ط نق^{٢} = ٠

أى : نق = ٢٠ و عندها : ح$''$ < ٠ $\therefore$ نق = ٢٠ تجعل ح قيمة عظمى

$\therefore$ نق = ٢٠ سم ، بالتعويض فى (١) ينتج : ع = ٤٠ سم

(٣٦) نفرض أن أبعاد المستطيل : ب ﻫ = س ، و ﻫ = ص

من هندسة الشكل المقابل : Δ ﻫ ﻫ و $\sim$ Δ ﻫ ى ء

و حيث : ﻫ ب = ٣ ل ، ب ﺣ = ٤ ل ، ﺣ ء = ل

$\therefore$ $\frac{٣ ل - س}{٢ ل}$ = $\frac{ص}{٤ ل}$ و منها : ص = ٦ ل − ٢ س (١)

، مساحة المستطيل = (م) = س ص = س (٦ ل − ٢ س) = ٦ ل س − ٢ س^{٢}

$\therefore$ م$'$ = ٦ ل − ٤ س ، م$''$ = − ٤

، $\because$ م$'$ = ٠ عندما : س = $\frac{٣}{٢}$ ل و عندما : م$''$ <٠

$\therefore$ س = $\frac{٣}{٢}$ ل تكون عندها مساحة المستطيل أكبر ما يمكن

من (١) : ص = ٣ ل $\therefore$ مساحة المستطيل (م) = $\frac{٩}{٢}$ ل^{٢}

، مساحة قطعة الأرض (ل) = $\frac{١}{٢}$ (ل + ٣ ل) × ٤ ل = ٨ ل^{٢}

$\therefore$ م : ل = $\frac{٩}{٢}$ ل^{٢} : ٨ ل^{٢} = ٩ : ١٦ أى أن : م = $\frac{٩}{١٦}$ ل

(٣٧) الربح = (ر) = س (١٠٠ − ٠,٠٢ س) − (٤٠ س + ١٥٠٠٠)

= ٦٠ س − ٠,٠٢ س^{٢} − ١٥٠٠٠

$\therefore$ ر$'$ = ٦٠ − ٠,٠٤ س ، ر$''$ = − ٠,٠٤

، $\because$ ر$'$ = ٠ عندما : ٦٠ − ٠,٠٤ س أى : س = ١٥٠٠ و عندما : ر$''$ < ٠

$\therefore$ س = ١٥٠٠ يكون عندها ر أكبر ما يمكن

أى من الواجب أن ينتج المصنع ١٥٠٠ وحدة ليحقق أكبر ربح

تمارين (٧)

(١) ∫ (٣ س^{٢} − ٢ س − ٥) ء س = س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٥ س + ث

(٢) ∫ س$^{-٤}$ (٣ + ٤ س − ٤ س^{٢}) ء س = ∫ (٣ س$^{-٤}$ + ٤ س$^{-٣}$ − ٤ س$^{-٢}$) ء س

= − س$^{-٣}$ + ٢ س$^{-٢}$ + ٤ س$^{-١}$ + ث

(٣) ∵ س^{١٠} = (س^{٢})^{٥}

∴ ∫ (٧ س − ١)^{٥} ء س = $\frac{١}{٦}$ × $\frac{١}{٧}$ (٧ س − ١)^{٦} + ث

= $\frac{١}{٤٢}$ (٧ س − ١)^{٦} + ث

(٤) ∫ $\frac{(٣ − ٥ س)^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ − ٥ س)^{\frac{١}{٢}}}$ ء س = ∫ (٣ − ٥ س)$^{\frac{١}{٦}}$ ء س

= − $\frac{٦}{٧}$ × $\frac{١}{٥}$ (٣ − ٥ س)$^{\frac{٧}{٦}}$ + ث

= − $\frac{٦}{٣٥}$ (٣ − ٥ س)$^{\frac{٧}{٦}}$ + ث

(٥) ∫ (س^{٢} − $\frac{١}{س^{٢}}$) (س^{٢} + $\frac{١}{س^{٢}}$) ء س = ∫ (س^{٤} + $\frac{١}{س^{٤}}$) ء س

= $\frac{١}{٥}$ س^{٥} + $\frac{١}{٣}$ س$^{-٣}$ + ث

(٦) $\frac{١}{٣}$ ∫ (٣ س + ٣) (٣ س + ٥)$^{\frac{١}{٢}}$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ ∫ (٣ س + ٥ − ٢) (٣ س + ٥)$^{\frac{١}{٢}}$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ ∫ (٣ س + ٥) (٣ + ٥ س)$^{\frac{٣}{٢}}$ ء س − $\frac{٢}{٣}$ ∫ (٣ + ٥ س)$^{\frac{١}{٢}}$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢}{٥}$ (٣ + ٥ س)$^{\frac{٥}{٢}}$ − $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{١}{٥}$ (٣ + ٥ س)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

= $\frac{٢}{٤٥}$ (٣ + ٥ س)$^{\frac{٥}{٢}}$ − $\frac{٤}{٢٧}$ (٣ + ٥ س)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

(٧) ∫ [قا^{٢} ($\frac{١}{٢}$ س + ٥) + حتا (٢ س + ١)] ء س

= ٢ طا ($\frac{١}{٢}$ س + ٥) + $\frac{١}{٢}$ حا (٢ س + ١) + ث

(٨) ∫ (٣ − ٢ قا^{٢} س) ء س = ٣ − ٢ طا س + ث

(٩) ٣ ∫ ٢ حا س حتا س ء س = ٣ ∫ حا ٢ س ء س = $\frac{٣}{٢}$ حتا ٢ س + ث

∵ حتا^{٢} س = ١ − حا^{٢} س = (١ − حا س) (١ + حا س)

∴ ∫ (١ + حا س) ء س = س + حتا س + ث

(١١) ∫ [$\frac{١}{٢}$ (١ + حتا ٢ س) + (قا^{٢} س − ١)] ء س

= $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س + طا س − س + ث

(١٢) ∵ س^{١٧} = س (س^{٢})^{٨}

∴ د (س) = ∫ س (س + ١)^{٨} ء س = ∫ (س + ١ − ١) (س + ١)^{٨} ء س

= ∫ (س + ١)^{٩} ء س − ∫ (س + ١)^{٨} ء س

= $\frac{١}{١٠}$ (س + ١)^{١٠} − $\frac{١}{٩}$ (س + ١)^{٩} + ث

∴ د (٠) − د (−١) = ($\frac{١}{١٠}$ − $\frac{١}{٩}$ + ث) − (٠ + ث) = − $\frac{١}{٩٠}$

(١٣) د (س) = ∫ (٣ س^{٢} + ٤ س − ٤) ء س = س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٤ س + ث

، ∵ د (س) = ٨ عند س = − ٢

∴ ٨ = − ٨ + ٨ + ٨ + ث ∴ ث = ٠ ∴ د (س) = ٣ س^{٢} + ٤ س − ٤

(١٤) ص = ∫ (٤ − ٣ س^{٢}) ء س = ٤ س − س^{٣} + ث

∴ ٠ = ٤ − ١ + ث ∴ ث = − ٣ ∴ ص = ٤ س − س^{٣} − ٣

، ع = ∫ ٥ [− ٤ (٤ س − س^{٣} − ٣)] ء س

= ∫ (١٧ – ١٦ س + ٤ س^{٣}) ء س

= ١٧ س – ٨ س^{٢} + س^{٤} + ث$_{٢}$

∴ ١٢ = ١٧ – ٨ + ١ + ث$_{٢}$ ∴ ث$_{٢}$ = ٢

∴ ع = س^{٤} – ٨ س^{٢} + ١٧ س + ٢

(١٥) ∫ ٢ ص ء ص = ∫ (٥ – ٦ س) ء س

∴ ص^{٢} = ٥ س – ٣ س^{٢} + ث   ∴ ٤ = ٥ – ٣ + ث   ∴ ث = ٢

∴ ص^{٢} = ٥ س – ٣ س^{٢} + ٢

(١٦) ∵ د (ى + هـ) – د (ى) = ك هـ ى – ٢ هـ^{٢}

∴ $\frac{\text{د (ى + هـ) – د (ى)}}{\text{هـ}}$ = ك ى – ٢ هـ

∴ نهــا$_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{د (ى + هـ) – د (ى)}}{\text{هـ}}$ = نهــا$_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ (ك ى – ٢ هـ) = ك ى

∴ د$'$ (ى) = ك ى   ∴ د$'$ (س) = ك س

∴ ∫ د (س) ء س = ∫ ك س ء س   ∴ د (س) = $\frac{١}{٢}$ ك س^{٢} + ث

، ∵ د (١) = ١ ، د (٢) = ١٠

∴ ١ = = $\frac{١}{٢}$ ك + ث ، ١٠ = = ٢ ك + ث

، بحل المعادلتين معاً ينتج : ك = ٦ ، ث = – ٢   ∴ د (س) = ٣ س^{٢} – ٢

(١٧) ∵ ص$'$ = س^{٢} – ٤ س + ٣ = (س – ٣) (س – ١)

، ص$'$ = ٠   عندما : س = ٣ ، س = ١ ، ص$''$ = ٢ س – ٤

∴ ص$''$ (٣) = ٢ > ٠   ∴ نقطة القيمة الصغرى المحلية هى (٣ ، – ٨)

، ص$''$ (١) = – ٢ > ٠   ∴ عند س = ١ توجد قيمة عظمى محلية

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، – ٨)

، ص = ∫ (س^{٢} – ٤ س + ٣) ء س = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٣ س + ث

∴ – ٨ = ٩ – ١٨ – ٩ + ث   ∴ ث = – ٨

∴ ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٣ س – ٨ ، عند : س = ١ فإن : ص = – $\frac{٢٠}{٣}$

(١٨) ∵ ميل العمودى = $\frac{\text{ص} + ٤}{\text{س} - ٣}$ ∴ ميل المماس ($\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$) = $\frac{٣ - \text{س}}{\text{ص} + ٤}$

∴ ∫ (ص + ٤) ء ص = ∫ (٣ – س) ء س

∴ $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + ٤ ص = ٣ س – $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠)   ∴ ث = ٠

(١٩) ∵ ص$'$ = ١ – حتا ٢ س

∴ ص = ∫ (١ – حتا ٢ س) ء س = س – $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠) ∴ ٠ = ٠ – $\frac{١}{٢}$ حا ٠ + ث   ∴ ث = ٠

∴ ص = س – $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س

(٢٠) ∵ $\frac{\text{ء م}}{\text{ء س}}$ = ٦ س – ٢   ∴ م = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ س^{٢} – ٢ س + ث

، ∵ ميل المستقيم الموازى للمماس = ٢   ∴ م عند (٣ ، ١) = ٢

∴ ٢ = ٢٧ – ٦ + ث   ∴ ث = – ١٩   ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ س^{٢} – ٢ س – ١٩

∴ ص = س^{٣} – س^{٢} – ١٩ س + ث$_{٢}$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ١)   ∴ ث$_{٢}$ = ٤٠

∴ ص = س^{٣} – س^{٢} – ١٩ س + ٤٠

(٢١) ∵ م ∝ س^{٢} ∴ م = ك س^{٢} ، ∵ م = ١٢ عند (١ ، – ١)

∴ ١٢ = ك × ١   و منها : ك = ١٢   ∴ م = ١٢ س^{٢}

∴ ص = ∫ ١٢ س^{٢} ء س = ٤ س^{٣} + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، – ١)   ∴ ث = – ٥

∴ ص = ٤ س^{٣} – ٥

(٢٢) ∵ م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ $\text{س}^{٢}$ − ك س   ∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}$ = ٦ س − ك

، ∵ (١ ، ٢) نقطة إنقلاب   ∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}$ = ٠ عند س = ١

∴ ٦ × ١ − ك = ٠   و منها : ك = ٦   ∴ م = ٣ $\text{س}^{٢}$ − ٦ س

∴ ص = $\int$ (٣ $\text{س}^{٢}$ − ٦ س) ء س = $\text{س}^{٣}$ − ٣ $\text{س}^{٢}$ + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)   ∴ ث = ٤

∴ ص = $\text{س}^{٣}$ − ٣ $\text{س}^{٢}$ + ٤

(٢٣) ∵ (٠ ، ٢) نقطة إنقلاب   ∴ ص″ = ٠ عند س = ٠

∴ ك × ٠ − ل = ٠   ∴ ل = ٠

∴ ص″ = ك س   ∴ ص′ = $\int$ ك س ء س = $\frac{١}{٢}$ ك $\text{س}^{٢}$ + ث

، ∵ (−١ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية   ∴ ص′ = ٠ عند س = −١

∴ ٠ = $\frac{١}{٢}$ ك + ث   ∴ ث = − $\frac{١}{٢}$ ك   ∴ ص′ = $\frac{١}{٢}$ ك $\text{س}^{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ ك

∴ ص = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ ك $\text{س}^{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ ك) ء س = $\frac{١}{٦}$ ك $\text{س}^{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ ك س + $\text{ث}_{٢}$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (−١ ، ٤)

∴ ٢ = ٠ − ٠ + $\text{ث}_{٢}$ ∴ $\text{ث}_{٢}$ = ٢

، ٤ = $\frac{١}{٦}$ ك + $\frac{١}{٢}$ ك + $\text{ث}_{٢}$ ∴ ٤ = $\frac{١}{٦}$ ك + $\frac{١}{٢}$ ك + ٢

و منها : ك = ٦   ∴ ص = $\text{س}^{٣}$ − ٣ $\text{س}^{٢}$ + ٢

(٢٤) ∵ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ٢ ن + ٥٠

∴ ح = $\int$ (٢ ن + ٥٠) ء ن = $\text{ن}^{٢}$ + ٥٠ ن + ث

و عندما كان الوعاء فارغاً فإن : ح = ٠ ، ن = ٠   ∴ ث = ٠

∴ ح = $\text{ن}^{٢}$ + ٥٠ ن

، عندما يمتلئ الوعاء فإن : ح = ١٤٠٠

∴ ١٤٠٠ = $\text{ن}^{٢}$ + ٥٠ ن   ∴ $\text{ن}^{٢}$ + ٥٠ ن − ١٤٠٠ = ٠

∴ (ن − ٢٠) (ن + ٧٠) = ٠   ∴ ن = ٢٠ ث

(٢٥) $\int$ ($\frac{١}{٢}$ $\text{ص}^{٢}$ + ص + ١) ء ص = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ $\text{س}^{٢}$ + س + ١) ء س

$\frac{١}{٦}$ $\text{ص}^{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ $\text{ص}^{٢}$ + ص = $\frac{١}{٦}$ $\text{س}^{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ $\text{س}^{٢}$ + س + ث

∴ (س − ص) + $\frac{١}{٢}$ × ($\text{س}^{٢}$ − $\text{ص}^{٢}$) + $\frac{١}{٦}$ × ($\text{س}^{٣}$ − $\text{ص}^{٣}$) = ث

∴ $\frac{\text{س} - \text{ص}}{١}$ + $\frac{\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{٢ \times ١}$ + $\frac{\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣}}{٣ \times ٢ \times ١}$ = مقدار ثابت

∴ $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\lfloor\underline{١}}$ + $\frac{\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{\lfloor\underline{٢}}$ + $\frac{\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣}}{\lfloor\underline{٣}}$ = مقدار ثابت